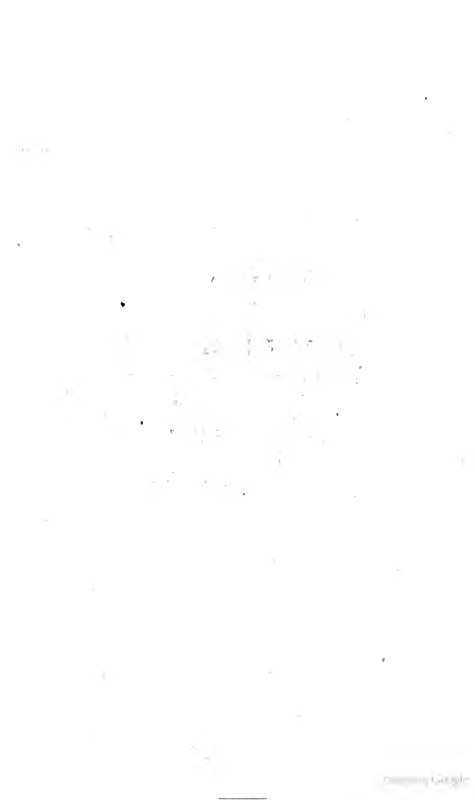
CATECHISMO

DI

MATEMATICHE PURE

AD USO DEGLI STUDI GENERALI

Parte prima — Sezione prima

GEOMETRIA PIANA

GEOMETRIA PIANA

DI

CARLO ROCCO

Professore di Geometria nel R. Collegio Militare

TERZA EDIZIONE

Riveduta, corretta, ed accresciuta.

Mathesis philosophiae, et scientiis initia, ac veluti mammam praebet.
Bac.

NAPOLI

DALLO STABILIMENTO DEL GUTTEMBERG.

1844

Tutti gli esemplari, che non sono muniti della firma dell'Autore, devono considerarsi come contraffatti. C. Rocco

PREFAZIONE

L' insegnamento è la pietra di paragone dei libri elementari, per cui nell' intraprender la terza edizione di questa istituzione di geometria piana abbiamo procurato di mettere a profitto le osservazioni fatte nell' insegnarla, affinchè essa potesse meglio corrispondere al suo scopo, cioè quello di ridurre la scienza alla più grande semplicità possibile, senza togliere nulla al rigore giustamente richiesto ne' libri di Matematiche. Quindi siamo andati ritoccando quà e là il nostro lavoro, ad oggetto di render più chiare o più compiute, e talvolta anche più rigorose alcune teoriche; sia con qualche giunta, sia con qualche modificazione secondo i diversi casi. Ed in ciò abbiamo seguito l' esempio di molti distinti geometri che a' nostri giorni hanno scritto elementi di Matematiche; poichè ne' libri di questo genere qualunque sistema si adotti, bisogna attendere che l' insegnamento faccia scoprire certi perfezionamenti che non si possono prevedere scrivendo. I più notevoli da noi fatti in questa edizione si riducono a ciò che segue.

Il problema, in cui si propone di costruire un triangolo essendo dati tre de' suoi elementi, fra i quali vi sia almeno un lato, era stato da noi messo, ad imitazione di altri geometri, nel Cap. XIII, cioè dopo la teorica delle intersezioni e de' contatti de' cerchi. Euclide ha risoluto un solo caso di questo problema, e lo ha fatto in un modo imperfetto,

perchè assume come evidente l'incontro de' due cerchi, mentre dev'essere dimostrato, onde è stato biasimato dal Wolfio, dal Simpson, e da altri dotti geometri, i quali stimarono perciò doversi dare la risoluzione del problema enunciato in tutti i casi possibili, dopo la teorica sopra nominata. Purtuttavolta riflettendo che quello incontro può dimostrarsi a rigore indipendentemente dalla teorica in quistione, abbiam giudicato di mettere la risoluzione di un tal problema in fine del Cap. V, cioè dopo di aver esposto le proprietà de'triangoli, e delle rette perpendicolari ed oblique considerate come lati di triangoli, perocchè, secondo il nostro modo di vedere, bisogna dare la descrizione geometrica delle figure prima di venire a paragonarle fra loro. Facendo cambiar luogo al problema medesimo, abbiam procurato che la sua risoluzione nulla perdesse in quanto al rigore, dappoichè trattavasi di problema importantissimo; e ci era occorso di osservare che la mancanza di una soluzione completa di esso negli elementi di Euclide, aveva indotto qualche solenne euclidista ad attribuire ad errore delle tavole logaritmiche l'assurdo trigonometrico che presenta alle volte il calcolo delle formole della trigonometria, coerente alla impossibilità geometrica di costruire il triangolo; e ciò per non aver letta altra geometria all'infuori di quella di Euclide. Il che solo basterebbe a dimostrare con una prova di fatto irrefragabile la insufficienza degli elementi del greco geometra nello stato attuale delle Matematiche.

Il Cap. VIII che tratta delle ragioni e proporzioni è rimasto quasi lo stesso; solamente abbiamo esposto sotto forma di teorema uno scolio, in cui si dimostrava che in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è uguale a quello de' medii, anche quando le grandezze sono incommensurabili. La dimostrazione è stata rifatta in un modo più rigoroso, e se non c' inganniamo, le particolarità nelle quali siamo entrati a questo riguardo, e l'insieme di tutta la dottrina esposta in quel capitolo, ci sembrano tali da metter fuori dubbio che i termini di una proporzione possono considerarsi come numeri, anche quando si tratta di grandezze incommensurabili. Ciò vien negato non solo dagli Euclidisti, ma anche da un dotto geometra moderno, il quale a questo proposito dice che « se si ponga mente alla incommensurabilità
» in che talora si trovano le quantità continue, non sempre
» ci è dato sostituir numeri alle linee in proporzione; nè
» basta il caso nel quale i quattro termini d'una proporzio-
» ne possono divenir numeri per inferirne che sempre tali
» termini potranno considerarsi come numeri, mentre nel

» caso della incommensurabilità non v'ha modo di calcolo che
» valga a somministrarli (*).

Ma ognun vede che in un argomento di tanta importanza non bastano le semplici asserzioni, e conveniva dimostrare la insussistenza degli argomenti addotti da illustri geometri moderni, con i quali si prova che la teorica generale delle ragioni e proporzioni poggiata sull'Aritmetica può esser applicata non solo alle quantità discrete, ma anche alle continue. Una tal dimostrazione non è stata mai fatta, nè poteva farsi, perchè gli oppositori credono di aver detto tutto dicendo che le quantità incommensurabili non si possono esprimere in numeri esattamente, senza riflettere che per estendere la teorica aritmetica delle proporzioni alle quantità incommensurabili e per applicarla alla geometria non è necessario di fare *il calcolo effettivo* delle quantità delle ragioni, e per conseguenza de'termini di una proporzione, ma un tal calcolo occorre solo quando si vogliono applicare alla pratica i teoremi dimostrati in geometria. Basterà aver accennate queste cose, non potendo quì discuterle a rigoro: solamente non vogliamo tacere che la teorica delle ragioni e proporzioni vuol essere di sua natura esposta in un modo generale, ed indipendente da qualunque considerazione geometrica; e ciò non può ottenersi che in due modi, o ricorrendo al principio degli egualmente moltiplici di Euclide, cioè ad un teorema che questo geometra non ha dimostrato, o ricorrendo all'Aritmetica, la quale valendosi delle frazioni continue non solo arriva a dare con chiarezza e semplicità quella teorica, applicandola anche alle quantità incommensurabili, ma offre il mezzo di dimostrare con estrema facilità il teorema di Euclide. Fuori di queste due vie non v'ha mezzo che valga a fondare una teorica generale delle ragioni e proporzioni, e nel fatto il lodato geometre più sopra citato avendo abbandonato l'una e l'altra via ha dovuto ricorrere alle costruzioni geometriche per dimostrare i teoremi relativi alle proporzioni.

Alla fine del Cap. X abbiam riunito le proprietà principali del triangolo rettangolo, alcune delle quali si trovavano esposte nel Cap. XI. Questa modificazione ci è stata suggerita dall'insegnamento, e dal riflettere che quando si è dimostrato che la perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto divide il triangolo rettangolo in due triangoli simili fra loro ed a tutto il triangolo, conseguenze di questo teorema sono appunto le proprietà, di cui parliamo; nè va-

(*) *Corridi*, *Geometria* p. IX.

le dissimularle per impedire che vi siano. Oltre a ciò il teorema di Pitagora non appartiene ai soli quadrati descritti sopra i tre lati del triangolo rettangolo, ma si estende a tutti i poligoni simili, ed anche ai cerchi che hanno que' lati per diametri, onde la dimostrazione di queste verità deve cavarsi dai triangoli simili, se si vuole ridurre la scienza a principii generali, e non ad una raccolta di casi particolari disposti ad arbitrio del compilatore. Del resto abbiam voluto conservare ancora la dimostrazione antica del teorema pitagorico, avuto riguardo alla sua celebrità.

Il Cap. XI è rimaso come era; solamente vi si è aggiunto qualche scolio, e qualche noterella a piè di pagina, a fine di mostrare ai giovani che le poche proposizioni di quel capitolo contengono in un modo svelto, semplicissimo, e senza alcun calcolo, tutto il pesantissimo ed intricatissimo secondo libro degli Elementi di Euclide, che forma la disperazione degli studenti, e che così facilmente sfugge dalla memoria. La sola proposizione ottava del libro accennato è stata messa in una nota alla fine della nostra opera, perchè non necessaria; e questa stessa proposizione si troverà dimostrata in un modo semplicissimo, e senza quella tremenda enunciazione e dimostrazione euclidea.

Nel Cap. XIII ci siamo sforzati di esporre in modo più semplice e più rigoroso la difficile teorica delle intersezioni e dei contatti de' cerchi, la quale, se non andiamo errati, ci sembra esposta in un modo poco rigoroso nelle moderne istituzioni di geometria. Euclide ha racchiusa una siffatta teorica in un picciolissimo numero di proposizioni, che la rendono monca ed oscura, siccome apparisce ancora dal giudizio di un dottissimo commentatore ed ammiratore di Euclide, il P. Clavio, il quale in un suo scolio mostra di dubitare della esattezza della teoria euclidea dei contatti. Ed a questo proposito non vogliamo tacere un' altra osservazione da noi fatta sullo stesso libro 3.º di Euclide. Il geometra greco qualche volta assume postulati e principii tutt' altro che evidenti, e per contrario spesso non si permette le operazioni più semplici senza averle prima giustificate con la risoluzione di un problema; così nel libro 1.º, non si permette il trasporto dell' intervallo, la quale pedanteria, di quanta conseguenza sia in tutto il tessuto del suo lavoro, non è qui il luogo d esaminare. Similmente nel libro 3.º non si permette di considerare nel cerchio il suo centro senza prima aver dato il modo di trovarlo, il che significa assumere una metà soltanto della definizione del cerchio; onde è obbligato a dar prin-

cipio alla sua teorica col problema in cui si propone di trovare il centro di una data circonferenza. Per risolvere il quale problema, Euclide conduce una retta dentro il cerchio che prolunga sino alla circonferenza, dall'una e dall'altra parte; indi divide questa retta in due parti eguali, e pel punto di mezzo innalza una perpendicolare, che prolunga sino alla circonferenza d'ambe le parti; finalmente divide questa perpendidolare in due parti eguali, e dimostra per assurdo che il punto di mezzo è il centro richiesto. Ora, ognun vede che questa soluzione suppone tacitamente che una retta non può incontrare la circonferenza del cerchio in più di due punti; perchè se la perpendicolare innalzata incontrasse la circonferenza in tre punti, uno de' quali fosse il punto di mezzo della retta, la soluzione accennata non potrebbe più sussistere. Intanto Euclide non ha parlato dell'incontro della retta col cerchio esplicitamente in alcun luogo, e solo dalla seconda proposizione del libro 3.° si può conchiudere che l'incontro si faccia in due punti; ma una tal proposizione suppone già trovato il centro del cerchio. Questa specie di circolo vizioso è conseguenza della smania di voler tutto dimostrare, che nel caso attuale si estende sino alle definizioni; poichè il problema di trovare il centro di una data circonferenza, non essendo considerato da Euclide come una applicazione delle teoriche, ma dovendo servirgli a giustificare il centro del cerchio nella dimostrazione de' teoremi, non poteva esser risoluto con rigore a prima giunta, e senza l'ajuto di alcuna proprietà.

Finalmente l'ultimo capitolo è divenuto più breve, perchè senza mistero abbiamo considerata la circonferenza del cerchio come un poligono regolare di un numero infinito di lati, dimostrando però che il considerare la circonferenza in tal modo equivale al principio di Archimede, che la circonferenza del cerchio è maggiore del perimetro di ogni poligono iscritto, ed è minore del perimetro di qualunque poligono circoscritto. Nulladimeno abbiamo conservata la dimostrazione genuina del geometra di Siracusa intorno alla misura del cerchio per dare ai principianti l'idea del metodo di esaustione.

Speriamo che la fatica da noi durata per rendere più facili ed ad un tempo più rigorosi gli elementi di geometria, ottenga l'aggradimento della gioventù studiosa, alla quale raccomandiamo di coltivare le Matematiche moderne, mettendo da parte le vecchie istituzioni, se vuole ricavare utilità vera dallo studio delle scienze esatte.

Ma siffatta raccomandazione non potrà produrre veruno effetto, se la gioventù non viene premunita contro l'influsso di alcuni pregiudizii radicati da lungo tempo in fatto di geometria, i quali con la loro inerzia resistono a qualsivoglia miglioramento delle istituzioni geometriche. Perocchè vi sono alcuni, che non volendo assolutamente ammettere negli elementi di geometria altri principii, ed altro genere di dimostrazioni che quelli tramandati da Euclide, considerano la geometria elementare come una scienza fatta da ventidue secoli, e di cui l'andamento e la dottrina non possono ricevere ulteriori perfezionamenti. Queste loro pretensioni si limitano ora alla sola geometria piana di Euclide, perchè sarebbe ormai cosa ridicola il parlare della solida di questo geometra, dopo le osservazioni di Roberto Simson, e gli scritti de'Matematici de' nostri giorni.

Quindi gridano allo scandalo se la geometria piana di Euclide non si pone nelle mani della gioventù, e sostengono che tutte le geometrie piane scritte dai Matematici moderni hanno *uno sbadiato color geometrico*, e però guastano e corrompono l'insegnamento! E pazienza se un autore moderno dovesse essere valutato col modulo della geometria euclidea; ma avviene che gli Euclidisti a forza di portare a cielo, oltre il dovere, gli antichi, si sono persuasi di avere essi soli il dritto d'interpetrare le loro opere; e quindi hanno fatto tante chiose ad Euclide che si è formato nel loro capo una geometria che non va sempre d'accordo con quella del greco geometra. Infatti, volendo darne qualche esempio, essi, per dritto di buona amicizia o di protezione, regalano al testo di Euclide vocaboli che non vi si trovano, come *raggio* ed *arco*, senza trovar neanco necessario di definire queste voci, e nondimeno biasimano il Peyrard per aver fatto altrettanto nella traduzione delle opere di Archimede. Accusano i geometri moderni di concepire innalzata la perpendicolare, quando dimostrano che la somma degli angoli adiacenti è uguale a due retti, ma non riflettono che un siffatto concetto trovasi in Euclide, il quale pone come assioma che tutti gli angoli retti sono eguali, vale a dire assume come evidente che da un punto di una retta qualunque si può innalzare una perpendicolare, e di più non se può innalzare che una sola. Negate tutto questo, e vedrete se potrà più reggere l'assioma di Euclide: laonde gli Euclidisti volendo censurare i moderni scavano, senza avvedersene, le fondamenta della geometria euclidea. E così pure dichiarano erronea la distinzione, che fanno i geometri moderni, delle figure uguali dalle figure e-

quivalenti, mentre lo stesso Euclide distingue le figure in eguali, ed in eguali e simili. Se voi dite che il quadrato dell' ipotenusa è uguale alla somma de' quadrati de' cateti, vi si grida ia croce addosso, e pretendesi che si debba dire non *somma* di quadrati, ma quadrati *presi insieme*, abbenchè Euclide dica semplicemente che il quadrato dell' ipotenusa è uguale a' quadrati de' lati che comprendono l'angolo retto. Questa puerilità nasce da un' altra pretensione assai più curiosa, ed è che debba esser proscritto dalla Geometria tutto ciò che ha odore di Aritmetica, essendo ormai noto che gli Euclidisti non vogliono in geometria sentir parlare di considerazioni aritmetiche, che credono improprie e nocive alla purità geometrica. Quindi a maggior ragione proscrivono la distinzione delle quantità commensurabili dalle incommensurabili, e tutto ciò che sente di misura; come se la parola geometria non suonasse *misura dell' estensione*, e non avesse Euclide scritto il libro decimo, che tratta delle quantità incommensurabili, e non avesse Archimede data la misura del cerchio! Fino la parola *distanza* adoperata dai geometri moderni fa ombra a cotesti censori, e nondimeno essa trovasi in una definizione del libro 3 di Euclide, senza che questo geometra abbia dimostrato che la perpendicolare abbassata da un punto sopra una retta misura la distanza del punto alla retta. Non vi sarebbe mai fine, se si volessero qui enumerare tutte le censure fatte dagli Euclidisti ai geometri moderni, prendendo per tipo la geometria di Euclide, o per meglio dire la geometria che spacciano sotto questo nome; e basterà dire che hanno avuto il coraggio di biasimare financo Eulero, il Briareo delle Matematiche, perchè nelle sue opere immortali ha fatto uso frequente di corollarii, e di scolii, senza riflettere che i più grandi Matematici moderni quando vogliono indicare che un libro è scritto con somma chiarezza ed eleganza sogliono dire: *è un' opera Euleriana*!

Si può ora comprendere perchè gli Euclidisti dicano che nelle geometrie moderne manca il *rigore*, che pretendono trovarsi nel solo Euclide. Essi danno a quel vocabolo un significato tutto particolare, che non poteva mai capire nella mente de' moderni scrittori di elementi geometrici; e perciò nelle opere moderne di geometria non può trovarsi ciò che i loro autori erano ben lontani dal concepire.

Ma fortunatamente queste assurde pretensioni vanno sempre più perdendo terreno: ormai la stessa geometria piana di Euclide non s' insegna che da qualche Antiquario, e fino gl' Inglesi, un tempo così appassionati di Euclide, hanno depo-

sto i loro vecchi pregiudizii a questo riguardo, ed al più più alcuni di essi si contentano di dire che i soli quattro primi libri di Euclide si possono insegnare! questa transazione nasce dall' essersi quei dotti convinti, sulle opere dei matematici moderni, che la teorica delle ragioni e proporzioni non può trattarsi con l' oscuro e pesante apparato degli egualmente moltiplici, e che i rapporti delle figure esposti nel lib. 6 di Euclide si risentono fortemente di anticaglia, mentre al contrario ne' libri moderni queste dottrine, che costituiscono la parte, per dir così, vitale degli elementi di geometria, si trovano dimostrate con grande facilità e chiarezza. Si dovrà dunque mettere nelle mani della gioventù una frazione della geometria piana di Euclide? Ecco dove conduce la forza di un' antica tradizionale opinione! Non potendo salvar tutto si viene ad una transazione, con la quale si sagrifica la parte vitale della geometria euclidea, e si propone la conservazione de' soli primi quattro libri, come se questi potessero tollerarsi dopo i progressi fatti dalle Matematiche! Ma noi non possiamo discutere queste cose con l'estensione conveniente; e venendo alla conclusione diremo che le pretensioni degli Euclidisti possono imporne a quelli che non conoscono lo stato attuale delle scienze esatte, ma non potranno mai reggere ad un esame rigoroso, che che si possa dire in contrario da qualche appassionato lodatore degli antichi.

N. B. Volendosi limitare al puro necessario si potranno tralasciare in una prima lettura tutti i paragrafi preceduti da un asterisco.

GEOMETRIA PIANA

CAPITOLO PRIMO

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

1. *Grandezza* dicesi tutto ciò ch'è suscettivo di accrescimento e di diminuzione; tutto ciò, di cui si può assegnare o concepire il doppio o la metà, il triplo o la terza parte, ecc.

2. Grandezza *discreta* o *Numero* è la collezione di più cose, o di più parti simili e separate; come dieci stelle, sette cavalli, otto ducati, ecc., e si chiama *unità* una di quelle cose, o di quelle parti simili.

3. Grandezza *continua* è quella, che si considera come un sol tutto, senza distinzione di parti. Si manifestano in tal modo l'*estensione* de'corpi in generale, ed in particolare i loro contorni, e le *facce* che ne determinano le forme.

4. Il carattere proprio e distintivo dell'estensione è dunque riposto nel legame o *continuità* delle parti, che non si possono nè scorgere, nè numerare. Al contrario nel numero si considera solamente la *quantità*, ossia si considera quante cose o parti simili contiene.

5. E poichè ogni grandezza si può ridurre a numero, paragonandola ad un'altra della stessa specie presa per unità, è addivenuto che la parola *quantità* si è appropriata alla grandezza in generale, chiamandosi *quantità continua* la grandezza considerata come continua, per distinguerla dal numero, che si è chiamato *quantità discreta* o *discontinua*.

6. Le scienze *Matematiche* hanno per soggetto le grandezze. Esse esaminano le relazioni di sito, le proprietà che presentano le forme dei corpi in quanto alla loro estensione, ed i rapporti di quantità che risultano dal loro confronto.

7. Ciascuna delle scienze accennate ha un nome particolare secondo l'oggetto che contempla. Base e fondamento di tutte è l'*Aritmetica* che considera specialmente i numeri. Di questa non ci occuperemo in questo luogo, ma supporremo che si conoscano le operazioni principali di essa; le quali bastano a far comprendere pienamente quanto esporremo intorno alla *Geometria*.

8. La Geometria considera la grandezza continua; e perciò vien chiamata la *scienza dell'estensione*.

9. L'estensione ha lunghezza, larghezza, e profondità.

10. La *linea* è una lunghezza senza larghezza.

11. I *termini* o estremità di una linea si chiamano *punti*.

Il punto non ha dunque alcuna estensione.

12. La *linea retta* è la più breve di tutte quelle linee, che si possono condurre da un punto ad un altro.

Quindi la *distanza* di due punti è la lunghezza della linea retta che unisce questi due medesimi punti.

13. Ogni linea che non è retta, nè composta di linee rette, dicesi *linea curva*.

Così (fig. 1) AB è una linea retta, $ACDB$ una linea *spezzata* o composta di linee rette, AEB è una linea curva.

14. La *Superficie* è ciò che ha lunghezza e larghezza, senza profondità.

15. La *Superficie piana*, o più semplicemente il *Piano*, è quella superficie nella quale prendendo due punti ad arbitrio, ed unendoli con una linea retta, questa linea trovasi sempre tutta intera nella superficie.

16. Ogni superficie, che non è piana, nè composta di superficie piane dicesi *Superficie curva*.

17. *Solido* o *corpo* è ciò che ha lunghezza, larghezza e profondità.

18. La *circonferenza del cerchio* (fig. 2) è una linea curva AFD esistente in un piano, i cui punti sono tutti ugualmente distanti da un punto interno C, che si chiama *centro*.

19. La superficie piana terminata d'ogni intorno dalla circonferenza dicesi *cerchio* o *circolo*.

20. La retta condotta dal centro ad un punto della circonferenza appellasi *raggio*.

21. Ogni retta come AB che passa pel centro C, e termina alla circonferenza dall'una e dall'altra parte, si dirà *diametro*.

22. In virtù della definizione del cerchio è evidente che tutti i raggi AC, CE, CD, CB, CF, ecc. sono uguali fra loro, come pure tutti i diametri, e che ogni diametro è doppio del raggio.

23. Una porzione qualunque della circonferenza dicesi *arco*.

24. La *corda* o *sottesa* dell'arco è la linea retta che unisce le sue due estremità.

25. La circonferenza del cerchio è la sola linea curva che si considera negli elementi di geometria. Essa può concepirsi come generata dal moto di una linea retta situata in un piano, e di cui una estremità rimane fissa nel centro, mentre l'altra gira finchè ritorni al suo primo luogo.

26. Le definizioni del punto, della linea, della superficie, e del solido hanno la loro origine nelle idee comuni a tutti gli uomini, ma siccome ciò non apparisce a prima vista, così hanno bisogno di essere dilucidate, affinchè si possa veder chiaramente che i primi inventori ricavarono dalle idee accennate i principj ed i germi delle conoscenze geometriche. Una siffatta dilucidazione si troverà nella nota qui sottoposta (*).

Spiegazione di alcuni termini.

27. Il metodo che comunemente si adopera nella esposizione della geometria, consiste specialmente nel ridurre le verità di questa scienza ad altrettante proposizioni, cui si danno diversi nomi, secondo la natura di esse.

(*) Tutto ciò che non è corpo, o che non è attributo di un corpo non può cadere sotto i nostri sensi. Altronde se si togliesse ad un corpo la lunghezza, o la larghezza, o la profondità, esso cesserebbe di esistere. Ciò non ostante la geometria considera il punto come non avente alcuna estensione, la linea come estesa solamente in lunghezza, e la superficie come una lunghezza e larghezza senza profondità. Da ciò alcuni filosofi hanno dedotto che i punti, le linee, e le superficie sono pure astrazioni, che non possono appartenere ad alcuno oggetto posto fuori di noi; e quindi sono passati a metter in dubbio la certezza e la utilità della geometria medesima, negando l'esistenza delle parti dell'estensione, di cui essa esamina le proprietà.

Tutte queste difficoltà svaniscono, ove si rifletta che il punto, la linea, e la superficie esistono realmente, abbenchè non si possono separare dal corpo, di cui sono gli attributi. Infatti siasi qualunque il corpo, che si considera, esso è necessariamente terminato, senza di che non sarebbe distinto dallo spazio indefinito. Ora, i termini, che lo circoscrivono, sono le superficie, le quali hanno per termini le linee; e queste stesse vanno a terminare ne'punti. E non solamente questi termini esistono, ma di più cadono sotto ai nostri sensi, dappoichè col loro mezzo arriviamo a conoscere la figura dei corpi.

Che se poi la geometria considera i punti indipendentemente dalle linee, le linee indipendentemente dalle superficie, e le superficie indipendentemente dai solidi, ciò deriva dalla limitazione del nostro intelletto, che non potendo comprendere distintamente più cose ad un tratto, è costretto a separare per astrazione ciò che la natura ha congiunto con indissolubile legame. L'utilità di questa astrazione si manifesta in infiniti casi, ne'quali si deve esaminare la sola lunghezza, o la sola larghezza, o finalmente la sola profondità, trascurando le altre due; come avviene quando si vuol sapere l'altezza di una torre senza aver riguardo alla sua larghezza, ed alla sua lunghezza, la larghezza di un fiume senza la lunghezza e profondità dello stesso, ecc. Da ciò si vede che la geometria ha il suo fondamento nelle idee comuni a tutti gli uomini; e che lo studio di essa è di una immensa utilità.

28. *Teorema* è una proposizione, la quale diviene evidente per mezzo di un ragionamento, che chiamasi *dimostrazione*.

29. *Problema* è una quistione proposta, che esige una *soluzione*.

30. *Lemma* è una proposizione, che si premette per facilitare la dimostrazione di un teorema, o la soluzione di un problema.

31 *Corollario* è la conseguenza, che si deduce da una, o da più proposizioni.

32. *Scolio* è una osservazione, che si fa sopra una o più proposizioni precedenti, diretta a far conoscere il loro legame, la loro generalità, o la loro limitazione. Talvolta lo scolio si premette come preparazione alle proposizioni che seguono, e talvolta ancora si adopera per legittimare o per dichiarare un qualche principio.

33. *Ipotesi* significa supposizione. Ogni teorema costa di una ipotesi che si mette in principio, cioè nella enunciazione di esso teorema, e di una *conclusione* o conseguenza, che se ne deduce.

34. Tutt'i termini fin qui spiegati derivano dalla lingua greca: l'uso, che di essi si farà in appresso, metterà in piena luce il loro significato.

35. La geometria non potrebbe giugnere a dimostrare i teoremi ed a risolvere i problemi senza appoggiarsi ad alcuni principii che sono inerenti al soggetto proprio di questa scienza; e che si devono premettere ed accettare senza alcuna dimostrazione; poichè se tutto si dovesse dimostrare, non esisterebbe più alcuna scienza. I principii, di cui è parola, si contengono negli *assiomi* e ne' *postulati* o *dimande*.

Degli Assiomi.

36. *Assioma* è una proposizione, che non ha bisogno di dimostrazione.

37. La Geometria si vale di due specie di assiomi, cioè di quelli che le sono comuni coll'Aritmetica; e di quelli che spettano ad essa sola.

38. Gli assiomi comuni all'Aritmetica ed alla Geometria si chiamano ancora *notizie comuni*, e sono i segnenti:

I. Il tutto è maggiore di qualunque sua parte, ed è uguale alla somma delle parti, nelle quali è stato diviso.

II. Due quantità uguali ad nna terza sono uguali fra loro.

III. Se a quantità uguali si aggiungono, o si tolgono altre uguali o una medesima comune ad ambedue, le somme, o i residui saranno uguali.

IV. Se a quantità disuguali si aggiungono, o si tolgono quantità uguali, o una stessa ad entrambe comune, le somme, o i residui saranno disuguali:

V. Le quantità che sono doppie, triple, quadruple, ecc., di una medesima quantità, sono uguali fra loro.

VI. Le quantità che sono la metà, la terza parte, la quarta parte, ecc., di nna stessa quantità, sono uguali fra loro.

39. Gli assiomi proprii della Geometria sono:

I. Due grandezze sono uguali quando ***soprapposte*** una all'altra coincidono in tutta la loro estensione.

II. Da un punto ad un altro non si può condurre che una sola linea retta: ovvero, due linee rette non chiudono spazio.

III. Due linee rette non possono avere un ***segmento***, ossia una parte comune senza coincidere l'una coll'altra in tutta la loro estensione: ovvero, una linea retta non può prolungarsi dall'una e dall'altra parte che in un solo modo.

40. *Corollario*. Da ciò si deduce che due punti bastano a determinare la ***direzione*** o posizione di una linea retta; e per conseguenza due linee rette che hanno due punti comuni coincidono l una coll' altra in tutta la loro estensione, e formano una sola e medesima linea retta.

41. *Scolio*. È facile vedere che i tre assiomi precedenti dipendono il primo dalla nozione della estensione, e gli altri due da quella della linea retta, nozione ch' è chiara in tutti gli uomini, abbenchè non possa darsi una definizione esatta della linea retta, appunto perchè non può definirsi in che consiste il risultamento immediato della sensazione, che ci fa conoscere la via più corta per andare da un punto ad un altro.

Dei Postulati.

42. ***Postulati*** diconsi alcune operazioni così semplici che ognuno ammette la possibilità di effettuarle; e si effettuano realmente per mezzo della riga, e del compasso. Essi sono:

I. Condurre una linea retta da un punto ad un altro.

II. Prolungare una retta terminata.

III. Con un dato punto preso per centro, e con un dato intervallo come raggio descrivere un cerchio.

43. *Scolio*. Le tre precedenti operazioni appartengono propriamente alle pratiche meccaniche. La geometria non insegna a descrivere la linea retta, ed il cerchio, ma dimanda che si sappiano descrivere ***accuratamente*** prima di applicarsi allo studio di essa. Adunque le descrizioni della linea retta, e del cerchio sono problemi, ma non geometrici: si dimanda alla meccanica la loro soluzione, poi nella geometria s'insegna l'uso che deve farsene. E si gloria la geometria di eseguire così grandi cose appoggiandosi a pochi principii presi altrove. È dunque fondata la geometria sulla meccanica pratica, e non è altro che quella parte della meccanica universale, la quale espone e dimostra l'arte di misurare ***accuratamente*** (*).

44. *Corollario*. Per mezzo dei tre postulati precedenti si può facilmente descrivere una retta uguale alla somma, o alla differenza di due rette date (fig. 3).

(*) Newton ***Princip. Mathem.*** nella prefazione.

1° Sieno le due rette date DE, FG. Si tiri una retta indefinita, sulla quale si prenda un punto A ad arbitrio; indi si faccia centro in A e con un raggio AB uguale a DE si descriva un arco di cerchio che tagli la retta indefinita in un punto B. Parimente si faccia centro in B e con un raggio uguale a FG si descriva un altro arco di cerchio che tagli la retta indefinita in un punto C. È evidente che la retta AC sarà la somma delle rette AB, BC, e per conseguenza delle due rette date DE, FG.

2° Per avere una retta uguale alla differenza di due rette date DE, FG si tiri una retta indefinita, sulla quale si prenda nel modo sopraddetto una parte AB uguale alla maggiore DE; poi a partire dal punto B si prenda sopra AB una parte BH uguale alla minore FG, è manifesto che la retta AH sarà la differenza delle rette AB, BH, e per conseguenza delle due rette date DE, FG.

Spiegazione di alcuni segni.

45. Per servire alla brevità del discorso faremo uso talvolta dei segni qui appresso:

1°. Il segno $=$ indica l'uguaglianza di due quantità, così $A=B$ si pronunzia, *A e' uguale a B*: quando poi si vuol indicare che A *e' maggiore di* B, si scrive $A>B$: all'opposto $A<B$ dinota che A *e' minore di* B.

2°. Il segno $+$ significa *più*, e serve a dinotare l'addizione, onde $A+B$ rappresenta la somma delle due quantità A e B.

3°. Il segno $-$ si pronunzia *meno*, ed indica la sottrazione: così $A-B$ rappresenta la differenza delle due quantità A e B, ovvero ciò che resta togliendo B da A.

4°. Il segno $\times$ indica la moltiplicazione; così $A\times B$ si pronunzia ***A moltiplicato*** per B, ed indica che A si deve moltiplicare per B.

5°. Finalmente $A:B$, oppure $\frac{A}{B}$ si pronunzia, ***A diviso per B***, e vuol dire che A si deve dividere per B.

46. *Scolio.* Oltre ai segni precedenti si fa uso talvolta delle lettere con gli accenti. Supponiamo, per esempio, che con le lettere A, B, C siensi indicati certi punti, o linee; e che occorra indicare punti, o linee analoghe: in tal caso si adoperano le stesse lettere con gli accenti A', B', C', che si pronunziano *A prima*, *B prima*, *C prima*. Talvolta si ricorre alle stesse lettere con due accenti, che si pronunziano, ***A seconda***, ***B seconda***, ***C seconda***, con tre accenti, con quattro, ecc.

Deve ancora avvertirsi che in alcuni casi si adoperano le lettere majuscole insieme con le minuscole. Si distinguono allora nel discorso pronunziando la parola *grande* dopo le majuscole, e la parola *piccola* dopo le minuscole.

CAPITOLO II.

DELLE RETTE, CHE S'INCONTRANO, E DELLE RETTE PARALLELE.

47. Si è già veduto (n° 40) che due linee rette non possono avere due punti comuni senza coincidere l'una con l'altra in tutta la loro estensione. Quindi due linee rette separate e distinte non potranno mai avere più di un punto comune: e se hanno di comune un sol punto si dice che le due linee s'incontrano, o che concorrono, oppure che s'intersegano o si tagliano; ed il punto comune si chiama punto d'incontro, di concorso, d'intersezione.

48. *Definizione* I. Quando due rette AB, AC (fig. 4) s'incontrano, in un piano, la quantità più o meno grande, di cui esse si allontanano l' una dall' altra, quanto alla loro situazione, dicesi *Angolo*.

Le due rette medesime si chiamano *lati* dell'angolo, ed il punto ad esse comune appellasi *vertice* dell'angolo. (*)

49. Due angoli sono uguali allorchè situando il vertice dell'uno sul vertice dell'altro, ed applicando un lato sopra un lato, i rimanenti due lati si confondono in una medesima direzione.

50. Da ciò risulta evidentemente che la grandezza di un angolo non dipende dalla lunghezza dei suoi lati. Quando si è detto basta per acquistare una nozione compiuta dell'angolo, e per comprendere facilmente tutte le conseguenze che ne derivano, poco importando che non possa darsi una esatta definizione di esso angolo.

51. L'angolo s'indica alle volte colla sola lettera (fig. 4) del vertice, dicendosi l'*angolo* A. Ma siccome accade spesso che più angoli hanno un medesimo vertice, così si è convenuto d'indicare ciascun angolo con tre lettere, dicendosi l'angolo BAC, o che vale lo stesso CAB, avvertendo sempre di mettere in mezzo la lettera del vertice.

52. Se due angoli BAC, CAD (fig. 5) hanno lo stesso vertice A, un lato comune AC, e gli altri due lati AB, AD, situati l'uno da una parte, e l'altro dall'altra del lato comune AC. l'angolo BAD sarà evidentemente la somma dei due angoli BAC CAD. Quindi l'angolo CAD sarà la differenza dei due angoli BAD, BAC.

53. Supponiamo che dal punto A (fig. 6) si sieno tirate le rette AB, AC, AD, AE, ecc., in guisa che gli angoli BAC, CAD, DAE, ecc., risultino uguali fra loro. È manifesto che l'angolo DAB sarà

(*) Euclide ha definito l'angolo nel modo seguente:

« L'angolo piano è l'inclinazione, che nel piano hanno tra loro due linee, » che scambievolmente si toccano, e non sono poste per diritto. »

Questa definizione riducesi a sostituire alla parola angolo, che si doveva definire, quella d'inclinazione, che ha pure bisogno di essere definita. Del resto è impossibile dare una definizione esatta dell'angolo, appunto come non si può dare una definizione esatta della linea retta da cui dipende la formazione dell'angolo. È questa una imperfeziono inevitabile de' principii fondamentali della scienza.

il doppio dell'angolo BAC, l'angolo EAB ne sarà il triplo, e così in progresso. All'opposto l'angolo BAC sarà la metà dell'angolo BAD, la terza parte dell'angolo BAE, e così di segnito.

Da ciò si deduce che gli angoli si possono sommare, sottrarre, moltiplicare, e dividere come le altre quantità.

54. *Definizione* II. Quando una retta CA (fig. 7) incontra un' altra BD, in guisa che gli angoli *adiacenti* CAB, CAD sieno uguali fra loro, ciascuno di essi dicesi *angolo retto*, e la linea CA è detta *perpendicolare* o *normale* alla linea BD.

55. *Definizione* III. Se dal punto A si conduca un'altra retta AE, l'angolo BAE maggiore del retto BAC chiamasi *angolo ottuso*; l'angolo EAD minore del retto dicesi *angolo acuto*. La linea AE poi, che forma angoli adiacenti disuguali colla retta BD si dirà essere *obliqua* a questa retta.

56. *Definizione* IV. Sotto la denominazione di *angoli obliqui* si comprendono gli angoli acuti ed ottusi.

57. L'esistenza di una retta perpendicolare ad un'altra si potrebbe assumere come evidente, ma è facile assicurarsene nel modo seguente.

Si concepisca che la retta EA (fig. 7) sia posta sopra AD facendo con questa una sola linea retta, e che poi, restando AD immobile, la linea EA giri intorno al punto A verso il punto B. Finchè la linea EA coincide con AD, l'angolo formato da queste rette è *zero*, ma appena EA comincia a girare, tutti i punti di questa retta, eccetto il punto A, si distaccano ad un tempo dalla retta AD, ed allora l'angolo comincerà a formarsi. Siffatto angolo sarà acutissimo da principio, ma andrà crescendo a misura che gira la retta EA; e questo aumento non cesserà se non quando la retta EA sarà giunta a coincidere col prolungamento AB della retta AD. Quindi l'angolo EAD che nel principio del movimento era acuto potrà divenire ottuso; e per conseguenza dev'esistere una posizione della retta EA, in cui gli angoli adiacenti risultano uguali, ovvero dev'esistere una retta perpendicolare a BD. Or siccome la posizione accennata è *unica*, così ne consegue evidentemente che

Da un punto preso sopra una retta data non si può innalzare su questa retta che una sola perpendicolare.

PROPOSIZIONE I — *TEOREMA*.

58. *Gli angoli retti sono tutti uguali fra loro* (fig. 7).

Dimostrazione. Sieno le due rette HO, CA respettivamente perpendicolari alle due rette FG, BD. Dico che gli angoli retti FOH, BAC sono ugnali fra loro.

Imperciocchè, se le rette FG, BD s'immaginino soprapposte l'una all'altra in modo che il punto O dell'una coincida col punto A dell'altra, la perpendicolare OH dovrà pure coincidere colla perpendicolare AC; dappoichè se prendesse un altra direzione AE, allora da

uno stesso punto *A* si potrebbero innalzare due perpendicolari *AC*, *AE* sopra una medesima retta *BD*. Ma ciò è impossibile (n.° 57), dunque la retta *OH* deve coincidere colla retta *AC*; e per conseguenza gli angoli *FOH*, *BAC* sono uguali (n.° 49). Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE II — *TEOREMA*.

59. *Se una retta incontra un'altra, la somma degli angoli adiacenti è uguale a due angoli retti* (fig. 7).

Dim. La retta *EA* incontri la retta *BD* nel punto *A*. Dico che gli angoli adiacenti *EAB*, *EAD* presi insieme sono uguali a due retti.

Perocchè, se la retta *EA* è perpendicolare a *BD*, la proposizione enunciata risulta evidente, essendo retto ciascuno dei due angoli adiacenti. Suppongasi dunque che *EA* sia obliqua a *BD*, e dal punto *A* si concepisca innalzata sopra *BD* la perpendicolare *AC*.

L'angolo *EAB* supera il retto *BAC* dell'angolo *CAE*: al contrario l'angolo *EAD* è più piccolo del retto *CAD* dello stesso angolo *CAE*.

Dunque levando l'eccesso dell'angolo *EAB* sopra un retto, ed aggiungendo questo eccesso all'angolo *EAD*, la somma degli angoli adiacenti *EAB*, *EAD* sarà uguale a due retti. Il che bisognava dimostrare.

60. *Corollario*. Apparisce da questo teorema che se da un medesimo punto *A* (fig. 8) di una retta *BD*, e da una medesima parte si tirino quante rette si vogliano *AE*, *AG*, *AH*, ecc., tutti gli angoli consecutivi *BAE*, *EAG*, *GAH*, *HAD*, presi insieme saranno uguali a due retti; dappoichè sono uguali a due angoli adiacenti *BAH*, *DAH*.

61. *Definizione*. Due angoli si dicono *supplementari*, quando la loro somma equivale a due angoli retti; si dicono poi *complementari*, se equivalgono ad un angolo retto.

PROPOSIZIONE III — *TEOREMA*.

62. *Se dallo stesso punto* C *della retta* CD *si tirino a parti contrarie le rette* CA, CB, *in guisa che la somma degli angoli adiacenti* DCA, DCB, *sia uguale a due retti, le linee* AC, CB *formeranno una sola retta* AB (fig. 9).

Dim. Perocchè se *CB* non è il prolungamento di *AC*, lo sia *CF*. Essendo dunque *ACF* una linea retta che viene incontrata dalla retta *DC* nel punto *C*, sarà (n° 59) la somma degli angoli adiacenti *ACD*, *FCD* uguale a due retti. Ma per ipotesi è pure uguale a due retti la somma degli angoli *ACD*, *DCB*, dunque la prima somma sarà uguale alla seconda (n.° 38). Epperò se si tolga il comune an-

2

golo *ACD*, resterà (n.° 38) l'angolo *DCF* uguale all'angolo *DCB*, cioè il tutto uguale alla parte; il che non può sussistere (n.° 38). Quindi *CB* è il prolungamento di *AC*, ovvero *AC* e *CB* formano una sola linea retta. Il che bisognava dimostrare (*).

PROPOSIZIONE IV — *TEOREMA*.

63. *Se due rette si tagliano scambievolmente, gli angoli opposti al vertice sono uguali* (fig. 10).

Dim. Sieno *AB*, *CD* due linee che si tagliano in *O*, dico che gli angoli *opposti al vertice*, o *verticali DOA*, *BOC* sono ugnali fra loro, come pure gli angoli *AOC*, *DOB*.

Infatti la retta *AO* incontrando la retta *CD* nel punto *O*, fa con questa i due angoli adiacenti *DOA*,*AOC* uguali a due retti (n.°59). Parimente la retta *CO* incontrando la retta *AB* nello stesso punto *O*, fa con questa i due angoli adiacenti *AOC*, *BOC* uguali a due retti. Se dunque si toglie il comune angolo *AOC*, resterà l'angolo *DOA* uguale all'angolo *BOC* (n.° 38). Nello stesso modo si dimostrerà che l'angolo *AOC* è uguale all'angolo *DOB*. Dunque gli angoli opposti al vertice sono uguali fra loro. Il che bisognava dimostrare.

64. *Corollario.* Apparisce da questa dimostrazione che i quattro angoli formati intorno al punto d'intersezione di due rette che si tagliano, equivalgono a quattro angoli retti. Epperò se per lo punto accennato si tirino quante rette si vogliano, la somma di tutti gli angoli consecutivi sarà uguale a quattro retti.

PROPOSIZIONE V — *TEOREMA*.

65. *Se da un punto* O *di una retta* AB *si tirino a parti contrarie due rette* OD, OC, *in guisa che siano uguali gli angoli verticali* AOC, DOB, *o pure gli angoli* BOC, DOA, *le dette linee formeranno una sola e medesima linea retta* (fig. 10).

Dim. Perocchè, essendo per ipotesi l'angolo *AOC* uguale all'angolo *DOB*, se si aggiunga ad entrambi il comune angolo *BOC*, sarà la somma degli angoli *AOC*, *BOC* uguale alla somma degli angoli *DOB*, *BOC*: ma la prima somma è ugnale a due retti (n° 59), dunque ancora la seconda sarà uguale a due retti; e però (n° 62) le linee *OD*, *OC* formeranno una sola e medesima linea retta. Il che bisognava dimostrare.

(*) Le enunciazioni delle proposizioni saranno fatte sulle figure, quando messe sotto forma astratta riescono o troppo lunghe, o non così chiare come si conviene. L'obbligarsi costantemente ad enunciare astrattamente le proposizioni è una vera pedanteria, che non poche volte nuoce alla chiarezza delle idee, come può vedersi nelle enunciazioni di molte proposizioni di Euclide.

Delle rette parallele.

66. *Definizione*. *Rette parallele* si dicono quelle, che essendo in un medesimo piano, e prolungate indefinitamente dall' una, e dall' altra parte non s' incontrano mai.

67. *Scolio*. Quando una retta *GH* (fig. 11) taglia due altre *AB*, *CD*, gli otto angoli che ne risultano, vengono distinti con diversi nomi secondo la posizione che hanno rispetto alla secante. Laonde di quelli otto angoli quattro diconsi *esterni*, perchè fuori delle rette *AB*, *CD*, e sono *AEG*, *GEB*, *CFH*, *HFD*; ed i rimanenti quattro si considerano a due a due, o dalla stessa parte della secante *EF*, o in parti opposte. Gli angoli *AEF*, *EFC* situati della stessa parte della secante si chiamano *interni dalla stessa parte*, come anche gli angoli *EFD*, *BEF*; e si chiamano poi *alterni* gli angoli *AEF*, *EFD*, o pure gli altri *BEF*, *EFC*, situati in parti contrarie della secante, e disposti a modo di *Z*.

PROPOSIZIONE VI. — *TEOREMA*.

68. *Se due rette sono segate da un' altra, in guisa che l' angolo esterno sia uguale all' interno ed opposto dalla stessa parte, esse linee saranno parallele* (fig. 11).

Dim. Le due rette *AB*, *CD* sieno segate dalla terza *GH*, e sia l'angolo esterno *GEB* uguale all' interno ed opposto dalla stessa parte *EFD*. Dico che sarà *AB* parallela a *CD*.

Imperocchè essendo l' angolo *GEB* uguale al suo verticale *AEF* (n.° 63) e l'angolo *EFD* uguale al suo verticale *CFH*, ne segue che l' angolo esterno *CFH* posto dall' altra parte della secante sarà uguale all'interno ed opposto corrispondente *AEF*. Laonde l'ipotesi fatta da una parte della secante, cioè che l'angolo esterno *GEB* è uguale all'interno corrispondente *EFD*, si riproduce *identicamente* dall'altra parte della secante medesima; e però diviene evidente che se le due rette *AB*, *CD* si potessero incontrare da una parte, dovrebbero ancora incontrarsi dall'altra parte, ed allora le rette *AB*, *CD* chiuderebbero spazio; il che è assurdo (n.° 39). Dunque *AB* è parallela a *CD*. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE VII — *TEOREMA*.

69. *Se due rette sono segate da una terza, in modo che gli angoli alterni sieno uguali fra loro, esse linee saranno parallele* (fig. 11).

Dim. Le rette *AB*, *CD* sieno segate dalla terza *GH* in modo che risultino uguali gli angoli alterni *AEF*, *EFD*. Dico che *AB* è parallela a *CD*.

Infatti, l'angolo *AEF* è uguale al suo verticale *GEB* (n.° 63): ma per ipotesi lo stesso angolo *AEF* è uguale all'angolo *EFD*;

dunque (n.° 38) ancora l'angolo *GEB* dovrà essere uguale all'angolo *EFD*, vale a dire sarà l'angolo esterno uguale all'interno ed opposto dalla stessa parte; e per conseguenza (n.° 68) le due rette *AB*, *CD* devono essere parallele. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE VIII — *TEOREMA*.

70. *Se due rette vengono segate da una terza, e formano gli angoli interni dalla stessa parte presi insieme uguali a due retti, esse linee saranno parallele* (fig. 11).

Dim. Sieno le rette *AB*, *CD* tagliate dalla terza *GH*, e formino gli angoli interni *BEF*, *EFD* uguali a due retti. Dico che *AB* sarà parallela a *CD*.

Imperocchè, la retta *BE* incontrando la retta *GH* nel punto *E*, fa con questa gli angoli adiacenti *BEG*, *BEF* uguali a due retti (n.° 59): ma per ipotesi gli angoli *BEF*, *EFD* sono pure uguali a due retti, dunque la somma de' primi due angoli è eguale a quella degli altri due, e se si toglie il comune angolo *BEF*, resterà l'angolo *GEB*, uguale all'angolo *EFD*, cioè sarà l'angolo esterno uguale all'interno corrispondente ; e però le due rette *AB* , *CD* devono essere parallele. Il che bisognava dimostrare.

71. *Corollario* I. Due rette *GK*, *CD* (fig. 12) perpendicolari ad una terza *OF* sono parallele fra loro; dappoichè in tal caso la somma degli angoli interni da una stessa parte è uguale a due retti.

72. *Corollario* II. Da un punto *A* (fig. 13) situato fuori di una retta *MN* non si può abbassare sopra questa retta che una sola perpendicolare *AP*.Perocchè,se si potesse abbassare un'altra perpendicolare *AD*,la somma degli angoli interni *ADP*,*APD* sarebbe uguale a due retti; e per conseguenza le due rette *AP*, *AD* sarebbero parallele; ed allora non potrebbe esistere il punto *A* comune alle due rette medesime.

PROPOSIZIONE IX — *TEOREMA*.

73. *Se due rette vengono segate da una terza in modo che la somma degli angoli interni da una medesima parte sia minore di due retti, esse linee prolungate andranno ad incontrarsi* (fig. 14).

Dim. Siano due rette *AL*, *DC* segate da una terza *AN* in modo che la somma degli angoli interni *LAC*, *ACD* sia uguale a due retti, e quindi l'angolo esterno *DCE* eguale all'interno ed opposto dalla stessa parte *LAC* (n° 70), è manifesto che se si conduca pel punto *A*, dentro lo spazio *LACD*, una qualunque retta *AB*, la somma degli angoli interni *BAC*, *ACD* sarà minore di due retti. Ciò premesso, dico che se le rette *AB*, *CD* si prolunghino , andranno ad incontrarsi.

Infatti, per quanto piccolo possa essere l'angolo *LAB*, è eviden-

te che aggiunto a se stesso un numero di volte illimitato, lo spazio indefinito contenuto fra i lati dell' angolo così moltiplicato arriverà non solo a coprire, ma anche a sorpassare lo spazio indefinito compreso fra i lati dell' angolo LAN. Supponiamo dunque, per fissare le idee, che l' angolo LAB preso tre volte sia giunto a formare un angolo LAO maggiore dell' angolo LAN: e supponiamo ancora che lo spazio indefinito $LACD$ scorrendo lungo la retta AN abbia formato altre due simili strisce $DCEF$, $FEGH$; il che può bene ammettersi, perchè essendo l' angolo esterno DCE eguale all' interno ed opposto LAC, la retta LA nel suo movimento verso N dovrà coincidere con la primitiva posizione della retta CD, in guisa che la striscia $LACD$, quando il punto A sarà giunto in C, prenderà la posizione $DCEF$, e così di seguito.

Risulta da queste supposizioni, che lo spazio indefinito LAB è una terza parte dello spazio LAO, e che la striscia $LACD$ è minore della terza parte dello spazio indefinito LAN, poichè ripetuta tre volte non è giunta ad esaurire lo spazio medesimo, essendovi il resto HGN; ed è chiaro anzi che per essere la retta AN indefinita, moltiplicando come si voglia la striscia $LACD$, non si giungerebbe mai ad uguagliare non che a sorpassare lo spazio LAN. Or se la striscia $LACD$ è minore della terza parte dello spazio LAN sarà con più ragione minore della terza parte dello spazio LAO, che è più grande di LAN; e quindi la striscia $LACD$ sarà minore dello spazio LAB, il quale si è veduto essere terza parte di LAO.

Ciò posto, è chiaro che lo spazio LAB non potrebbe essere maggiore della striscia $LACD$, se la retta AB prolungata all' infinito non incontrasse mai la retta CD, perchè in tal caso la retta AB rimarrebbe sempre compresa fra le rette AL, CD, e lo spazio LAB sarebbe una parte della striscia $LACD$. La retta AB dovrà dunque incontrare la CD. Il che bisognava dimostrare.

74. *Scolio.* Si può dare a questa proposizione una enunciazione più generale. Perocchè se AB', e CD' (fig. 14) sono i prolungamenti di AB, e CD, essendo gli angoli CAB, CAB' eguali a due retti (n°59), come pure gli angoli ACD, ACD', la somma de' quattro angoli CAB, CAB', ACD, ACD' sarà uguale a quattro retti, e tolti gli angoli BAC, ACD minori di due retti, rimarranno gli altri due CAB', ACD' maggiori di due retti. Dunque le rette BB', DD' fanno con la secante AC, da una parte gli angoli interni minori di due retti, e dall' altra maggiori; e però potrà dirsi in generale che:

Se due rette sono segate da una terza in modo che la somma degli angoli interni da una medesima parte sia minore o maggiore di due retti, esse linee prolungate dovranno incontrarsi dalla parte verso la quale gli angoli interni sono minori di due retti (*).

(*) È questo il famoso postulato V di Euclide.

PROPOSIZIONE X — TEOREMA.

75. *Se due rette sono parallele e vengono segate da una terza,*
1.° *gli angoli interni dalla stessa parte presi insieme sono uguali a due retti.*
2.° *gli angoli alterni sono uguali fra loro.*
3.° *l' angolo esterno è uguale all' interno ed opposto dalla stessa parte* (fig. 11).

Dim. Siano le due rette parallele AB,CD segate dalla terza GH, dico in primo luogo che gli angoli interni BEF, EFD presi insieme sono uguali a due retti. Imperciocchè,se la somma di questi angoli non fosse eguale a due retti,dovrebbe essere minore o maggiore ; il che è impossibile, perchè le rette AB, CD andrebbero ad incontrarsi verso B, D, o verso A, C (n° 74), contro l' ipotesi.

In secondo luogo, dico che gli angoli alterni sono eguali fra loro. Infatti essendosi ora dimostrato che la somma degli angoli interni BEF, EFD è uguale a due retti, e tale essendo ancora la somma degli angoli BEF, AEF (n° 59), se dalle due somme eguali si tolga l' angolo comune BEF, rimarrà l' angolo EFD uguale all' angolo AEF ; cioè gli angoli alterni saranno eguali.

Finalmente anche l' angolo esterno GEB eguaglierà l' interno ed opposto dalla stessa parte EFD ; perchè l' angolo GEB è uguale al suo verticale AEF, e questo si è già dimostrato eguale all' alterno EFD. Il che bisognava dimostrare.

76. *Corollario* I. *Se due rette* CD, GK (fig. 12) *sono parallele, ogni retta* FO *perpendicolare ad una delle parallele, dev' essere perpendicolare ancora all' altra.* Perocchè essendo parallele,la somma degli angoli interni KOF, OFD è eguale a due retti ; ma uno di questi angoli è retto per ipotesi, dunque l' altro sarà pure retto.

77. *Corollario* II. *Per un punto dato* O(fig. 12) *non si può condurre ad una retta data* CD *che una sola parallela* GK. Infatti , qualunque altra retta LH non potrà mai essere parallela a CD, perchè se si tiri la secante OF, la somma degli angoli interni HOF, OFD risulta minore di due retti ; e però (n° 74) le due rette LH, CD prolungate s' incontreranno.

78. *Corollario* III. *Due rette* DE, FG (fig. 3) *parallele ad una terza* AC, *sono parallele fra loro .*

Perocchè se le due rette accennate potessero incontrarsi,dal punto del loro incontro si potrebbero condurre due rette parallele ad una medesima retta; il che non può sussistere (*).

(*) Immaginiamo (fig. 11) che la secante GH giri intorno al punto F verso D. In virtù della proposizione (n.° 75) gli angoli alterni AEF,EFD saranno sempre uguali fra loro. Quindi a misura che la secante si avvicinerà alla retta CD, l' angolo AEF andrà continuamente diminuendo della stessa quantità precisa, di cui diminuisce l' angolo EFD ; per conseguenza l' angolo AEF si avvicina continuamente a zero, ma non vi arriverà se non

PROPOSIONE XI — *TEOREMA.*

79: *Due angoli che hanno i lati rispettivamente paralleli e diretti dalla stessa parte, sono uguali* (fig. 15).

Dim. Sieno i due angoli *DEF*, *BAC*, nei quali sia il lato *DE* parallelo al lato *BA*, ed *EF* parallelo ad *AC*. Dico che l' angolo *DEF* = *BAC*.

Si prolunghi il lato *DE* finchè incontri il lato *AC* nel punto *O*; un siffatto incontro dovrà aver luogo, poichè pel punto *E* non si può condurre ad *AC* che una sola parallela *EF* (n° 77). Quindi rispetto alle parallele *EF*, *AC* che vengono segate dalla terza *DO*, sarà l'angolo esterno *DEF* uguale all'interno ed opposto *EOC* (n.° 75). Parimente rispetto alle parallele *DO*, e *BA*, che vengono segate dalla terza *AC*, l'angolo esterno *EOC* è uguale all'interno ed opposto *BAC*. Dunque l'angolo *DEF* è uguale all'angolo *BAC*. Il che bisognava dimostrare.

CAPITOLO III.

DEI TRIANGOLI.

80. Con due rette comunque situate non si può mai terminare un piano da per ogni dove, ma vi bisognano almeno tre rette.

81. *Definizione* I. Un piano terminato da tre rette dicesi *triangolo* : le tre rette medesime si chiamano *lati* del triangolo. Si dicono poi *angoli del triangolo* gli angoli formati dai lati.

82. *Definizione.* II. Un triangolo si dice *equilatero*, quando ha i tre lati uguali ; *isoscele*, se ha due soli lati uguali; *scaleno*, quando i tre lati sono disuguali.

PROPOSIZIONE XII — *TEOREMA.*

83. *In ogni triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza* (fig. 16).

Dim. Sia il triangolo *ABC*. Dico in primo luogo che un lato qua-

---

quando la secante *GH* nel suo rivolgimento intorno al punto *F* sarà giunta a coincidere colla retta *CD*.

Da ciò si deduce evidentemente che due rette situate in un medesimo piano fanno tra loro un angolo zero in due soli casi, cioè o quando l'una coincide coll' altra, o quando l' una è parallela all' altra. In ogni altro caso le due rette formeranno angolo, avendo un solo punto comune. Or in relazione con le parallele le rette che fanno angolo hanno ricevuto denominazioni particolari. Così, se si considerano nella parte in cui si accostano al punto comune, si chiamano *convergenti*; se poi si considerano nella parte in cui se ne scostano, si dicono *divergenti*. È facile vedere che le rette convergenti da una parte non possono divenire divergenti dalla stessa parte senza prima divenire parallele.

lunque AB è minore della somma degli altri due AC, BC.

Infatti, essendo la linea retta la più corta di tutte le linee che si possono condurre da un punto ad un' altro (n° 12), ne segue che la linea retta AB dev' essere minore della linea spezzata ACB, ch' è composta delle due rette AC, CB. Supponendo ora che AC sia maggiore di CB, dico in secondo luogo che AB è maggiore della differenza di queste due rette. Perocchè essendo per le cose precedenti la somma delle due rette AB, CB maggiore di AC, se si tolga di comune CB, resterà AB maggiore di $AC-CB$. Dunque in ogni triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XIII — *TEOREMA.*

84. *Se dentro un triangolo* ABC *si prenda un punto* D, *e si conducano le rette* DB, DC *alle estremità di un lato* BC, *la somma di queste rette sarà minore di quella degli altri due lati* AB, AC (fig. 16.)

Dim. Si prolunghi la retta BD finchè incontri il lato AC nel punto E.

Nel triangolo BAE il lato BE è minore della somma degli altri due AB, AE (n.° 83); e però se si aggiunge di comune EC, sarà la somma delle rette BE, EC minore di quella delle due AB, AC. Parimente nel triangolo DEC il lato DC è minore della somma dei lati DE, EC; e per conseguenza aggiungendo di comune BD, sarà la somma delle rette BD, DC minore di quella delle due BE, EC, e con più ragione di quella delle due AB, AC, che superava la somma delle BE, EC. Il che bisognava dimostrare.

Caratteri dell' uguaglianza de' triangoli.

85. I caratteri dell'uguaglianza dei triangoli equivalgono alle condizioni che determinano i triangoli medesimi. Ciò sarà messo in chiaro dalle proposizioni qui appresso.

PROPOSIZIONE XIV — *TEOREMA.*

86. *Due triangoli sono uguali, quando hanno due lati uguali a due lati ciascuno a ciascuno, e l' angolo compreso dai primi uguale all' angolo compreso dai secondi* (fig. 17).

Dim. Nei triangoli ABC, EDF sia il lato $AB=ED$, il lato $AC=EF$, e l'angolo $A=E$; dico che i due triangoli sono uguali.

Si soprapponga il triangolo ABC al triangolo EDF in modo che il punto A cada sul punto E, ed il lato AB sul lato ED. E poichè l' angolo $A=E$, ancora il lato AC caderà sul lato EF. Ma per ipotesi i lati AB, AC sono uguali ai lati ED, EF, dunque il punto B

dovrà coincidere col punto D, ed il punto C col punto F. Quindi il terzo lato BC coinciderà col terzo lato DF, altrimenti fra due punti si potrebbero condurre due linee rette ; il che è assurdo (n° 39). Or le grandezze che, soprapposte l' una all' altra, coincidono in tutta la loro estensione, sono uguali fra loro (n° 39) ; dunque il triangolo ABC è uguale al triangolo EDF. Il che bisognava dimostrare.

87. *Corollario*. S' inferisce da questo teorema che un triangolo è determinato da due lati e l' angolo compreso da questi lati, vale a dire che quando sono dati due lati e l' angolo compreso, il triangolo non sarà suscettivo che di una sola forma, e di una sola grandezza; poichè i triangoli che si possono fare con gli stessi due lati, e con lo stesso angolo compreso sono tutti identici.

PROPOSIZIONE XV. — *TEOREMA*.

88. *Due triangoli sono uguali, allorchè hanno due angoli uguali ciascuno a ciascuno, ed un lato uguale ad un lato, o che sia adiacente agli angoli uguali, o che sia opposto ad uno di questi medesimi angoli* (fig. 17).

Dim. I. *Caso*. Ne' triangoli ABC, EDF sia il lato $BC = DF$, l'angolo $B = D$, e l'angolo $C = F$: dico che questi due triangoli sono uguali.

Perocchè, soprapponendo il triangolo ABC al triangolo EDF in modo che il lato BC coincida col suo eguale DF, l'angolo B dovrà coincidere coll angolo D, e la retta BA con la retta DE: onde il punto A caderà in un punto della retta DE: similmente l'angolo C coinciderà coll' angolo F, ed il punto A dovrà trovarsi in un punto della retta FE. Quindi il punto A si troverà a un tempo sulla retta DE, e sulla retta FE ; ma due linee rette non si possono tagliare che in solo punto (n. 40), dunque il punto A dovrà coincidere col punto E, incontro delle rette DE, FE, e però il triangolo ABC combacerà col triangolo EDF, e gli sarà eguale.

II. *Caso*. Supponiamo ora (fig. 18) che sia l'angolo $B = D$, l'angolo $C = F$, ed il lato $AB = ED$: dico che sarà il triangolo ABC uguale al triangolo EDF; il che si riduce a dimostrare la eguaglianza dei due angoli A, ed E, ricadendo allora la dimostrazione in quella del caso precedente.

Or se questi due angoli non sono eguali, sia A maggiore di E, e si sopraponga il triangolo EDF al triangolo ABC in guisa che il lato ED coincida col suo eguale AB. Essendo per ipotesi l'angolo A maggiore dell'angolo E, il lato EF caderà dentro il triangolo ABC; e però il triangolo EDF sarà rappresentato dal triangolo ABF. Quindi l'angolo BFA sarà uguale all'angolo C; ma ciò è impossibile, perchè essendo l' angolo esterno uguale all'interno ed opposto dalla stessa parte le rette AF, AC sarebbero parallele (n° 68), ed allora non esisterebbe più il punto A, contro la supposizione : dunque non può essere l'angolo A maggiore dell'angolo E. Nello

stesso modo si dimostrerà che non può essere minore; e però deve essere l'angolo $A=E$, e quindi il triangolo ABC sarà uguale al triangolo EDF. Il che bisognava dimostrare.

89. *Corollario.* Segue dalla dimostrazione precedente che un triangolo è determinato, allorchè sono dati due de' suoi angoli, ed un lato qualunque; vale a dire non si può formare con siffatti dati che un solo triangolo, perchè se si potesse costruire un altro triangolo, questo sarebbe uguale al primo.

PROPOSIZIONE XVI — *TEOREMA.*

90. ***Se due lati d'un triangolo sono uguali rispettivamente a due lati d'un altro triangolo, e l'angolo compreso dai primi è maggiore dell'angolo compreso dagli altri due, sarà il terzo lato del primo triangolo maggiore del terzo lato del secondo*** (fig. 19).

Dim. Ne' triangoli ABC, EDF sia il lato $AB=ED$, il lato $BC=DF$, e l'angolo ABC maggiore dell'angolo EDF. Dico che il terzo lato AC del primo triangolo sarà maggiore del terzo lato EF del secondo.

Si soprapponga il triangolo EDF al triangolo ABC, in guisa che il lato DF coincida col suo uguale BC. È manifesto che il punto E del triangolo DEF potrà, secondo le diverse forme del triangolo ABC, cadere o dentro il triangolo ABC in un punto O, o sul lato AC in un punto G, o finalmente fuori dello stesso triangolo ABC in un punto L.

Nel primo caso, la somma de' due lati OB, OC sarà minore di quella de' lati AB, AC (n° 84); e però togliendo da una parte AB, e dall'altra la sua uguale OB, poichè OB rappresenta ED, che si è supposto uguale ad AB, resterà OC, ovvero EF, minore di AC.

Nel secondo caso, la retta GC, ovvero EF, sarà evidentemente minore di AC.

Finalmente nel terzo caso, essendo nel triangolo GCL il lato LC minore della somma degli altri due lati GC, GL (n° 83), e nel triangolo GAB il lato AB minore della somma dei lati AG, GB, ne risulterà che la somma de' lati LC, ed AB sarà minore di quella delle quattro rette GC, GL, GA, GB, ossia delle due LB, ed AC. Perlocchè togliendo da una parte AB, e dall'altra la sua uguale LB, che rappresenta $ED=AB$, resterà LC, ovvero EF, minore di AC. Dunque in tutti i casi EF è minore di AC. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XVII — *TEOREMA.*

91. ***Se due lati d'un triangolo sono rispettivamente uguali a due lati d'un altro triangolo, ed il terzo lato del primo è maggiore del terzo lato del secondo, sarà l'angolo compreso dai due primi lati maggiore dell'angolo compreso dai due secondi*** (fig. 19).

Dim. Ne'triangoli ABC, EDF sia il lato $AB = ED$, il lato $BC = DF$, ed il lato AC del primo triangolo maggiore del lato EF del secondo. Dico che sarà l' angolo ABC maggiore dell' angolo EDF.

Perocchè, se l'angolo ABC non è maggiore dell'angolo EDF, sarà o uguale, o minore. Nel primo caso il lato AC sarebbe uguale al lato EF, in virtù della uguaglianza dei due triangoli ABC, EDF (n° 86) : nel secondo, il lato AC sarebbe minore del lato EF, in virtù della proposizione precedente. Ma ciò è contro la supposizione in ambedue i casi, dunque l' angolo ABC dev' essere maggiore dell' angolo EDF. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XVIII — *TEOREMA.*

92. *Due triangoli sono uguali, allorchè i tre lati del primo sono rispettivamente uguali ai tre lati del secondo* (fig. 17).

Dim. Ne'due triangoli ABC, EDF sia il lato $AB = DE$, $AC = EF$, $BC = DF$. Dico che sarà l' angolo $A = E$, $B = D$, $C = F$.

Infatti, se l'angolo A fosse maggiore dell'angolo E, sarebbe il lato opposto BC maggiore del lato DF (n° 90), contro la supposizione; e se l' angolo A fosse minore dell' angolo E, il lato BC sarebbe minore del lato DF, anche contro la supposizione; dunque l'angolo A dev'essere uguale all' angolo E. Nello stesso modo si dimostra che l' angolo $B = D$, e l'angolo $C = F$; e però (n° 86) sarà il triangolo ABC uguale al triangolo EDF. Il che bisognava dimostrare.

93. *Corollario.* Un triangolo è determinato dai suoi tre lati.

94. *Scolio.* Merita di essere osservato che ne' triangoli uguali, gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali, e reciprocamente i lati uguali sono opposti agli angoli uguali.

CAPITOLO IV.

RISOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI.

95. Le proposizioni teoretiche fin qui dimostrate, unite alla definizione del cerchio, possono servire a risolvere diversi problemi utili per se stessi, e proprii ad avvezzare i principianti all'applicazione delle teoriche apprese. Ma oltre a ciò si può fare ancora un altro uso della soluzione de' problemi, ed è quello di dimostrare la possibilità di certe cose, dando metodi certi per costruirle (*). E principalmente sotto quest' ultimo punto di vista che riportiamo qui appresso la soluzione di alcuni problemi; dappoichè sono necessarii nelle dimostrazioni dei teoremi, che verranno in seguito.

(*) La soluzione di un problema contiene la *costruzione*, cioè l'operazione geometrica, che determina ciò che si va cercando, e la *dimostrazione* di essa costruzione. Quindi il problema si riduce sempre a costruire qualche cosa, vale a dire un punto, una linea ecc., mentre il teorema non costruisce alcuna cosa, ma dimostra una verità.

PROPOSIZIONE XIX — *PROBLEMA.*

96. *Da un punto di una retta data innalzare su questa retta una perpendicolare* (fig. 20).

Soluzione. Sia C un punto di una retta MN, da cui debba innalzarsi su questa retta la perpendicolare.

Si faccia centro in C, e con un raggio ad arbitrio si descrivano due archi di cerchio, che tagliano la retta data MN nei punti A. e B: poi si prendano questi punti come centri, e con un raggio uguale ad AB si descrivano due archi di cerchio, i quali evidentemente dovranno incontrarsi; poichè se si descrivano le circonferenze intere, quella descritta col centro A e col raggio AB dovrà passare pel punto B, ed estendersi verso M, e quella descritta col centro B e collo stesso raggio dovrà passare pel punto A, ed estendersi verso N. Ciò premesso, dal punto D del loro incontro si conduca la retta DC. Dico che questa sarà la perpendicolare richiesta.

Infatti, si tirino le rette DA, DB. Esssendo per costruzione $AC=CB$, ed $AD=BD$ come raggi di cerchi uguali, e DC comune ai due triangoli ACD, BCD, questi saranno uguali fra loro (n° 92) ; e però sarà l'angolo DCA uguale all'angolo DCB (n°. 94) , ovvero sarà DC perpendicolare a MN (n°. 54). Il che bisognava fare.

97. *Scolio.* È manifesto che facendo uso della costruzione precedente si potrebbe descrivere sopra una retta data AB un triangolo equilatero ABD; poichè i tre lati AB, AD, BD sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE XX — *PROBLEMA.*

98. *Da un punto situato fuori di una retta indefinita abbassare su questa retta la perpendicolare.* (fig. 21).

Sol. Sia A il punto da cui debba abbassarsi la perpendicolare sulla retta indefinita BD.

Si faccia centro in A, e con un raggio sufficientemente grande si descriva un arco che taglia la retta data ne'punti B. e D; indi si prendano questi punti per centri, e con un raggio uguale a BD si descrivano al di sotto di BD due archi, che dovranno incontrarsi per le ragioni addotte nella proposizione precedente. Ciò fatto, si congiunga il punto E d'incontro de'due archi col punto dato A. Dico che la retta AE sarà la perpendicolare richiesta.

Perocchè, se si tirino le rette AB, AD, BE, DE, ne risulteranno i due triangoli ABE, ADE, i quali saranno uguali perchè hanno i tre lati respettivamente uguali; e però sarà l'angolo BAC uguale all'angolo DAC. Or essendo ne'due triangoli ABC, ADC il lato $AB=AD$, il lato AC comune, e l'angolo $BAC=DAC$, essi triangoli saranno uguali; e per conseguenza sarà l'angolo $ACB=ACD$, ovvero (n°. 54) sarà AE perpendicolare a BD. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XXI — *PROBLEMA*.

99. *Dividere una retta terminata in due parti uguali* (fig. 22).

Sol. Sia da dividersi in due parti uguali la retta *AB*. Dai punti *A*, e *B* come centri, e con un raggio *AB* si descrivano due archi che si tagliano in *C*, e due altri archi che si tagliano in *D*; indi si conduca la retta *CD*. Dico che questa retta dividerà la retta data in due parti uguali nel punto *E*.

Perocchè, se si tirino le rette *CA*, *CB*, *AD*, *BD* si dimostrerà come nella proposizione precedente che il triangolo *CAE* è uguale al triangolo *CBE*; e per conseguenza (n°. 94) sarà *AE*=*EB*. Il che bisognava fare.

100. *Corollario.* Si deduce da questa proposizione che si può dividere una retta data *AB* in 4 parti uguali; poichè basta dividere ciascuna sua metà *AE*, ed *EB* in due parti uguali. Si concepisce ora come potrebbe dividersi *AB* in 8, in 16, in 32, ecc., parti uguali.

PROPOSIZIONE XXII — *PROBLEMA*.

101. *Dividere un angolo in due parti uguali* (fig. 21).

Sol. Sia da dividersi l'angolo *BAD* in due parti uguali. Si faccia centro nel vertice *A*, e con un raggio ad arbitrio si descriva un arco che tagli i lati dell'angolo nei punti *B*, e *D*, indi si tiri la corda *BD*, e presi per centri i punti *B* e *D* si descrivano col raggio *BD* due archi che si tagliano nel punto *E*. Finalmente si conduca la retta *AE*; questa dividerà l'angolo dato in due parti uguali.

Infatti, se si tirino le rette *AB*, *AD* *BE*, *DE* si dimostrerà come nelle due proposizioni precedenti che l'angolo *BAC* = *DAC*. Il che bisognava fare.

102. *Corollario.* Apparisce da questa proposizione che un angolo dato si può dividere in 4, in 16, in 32, ecc. parti uguali.

PROPOSIZIONE XXIII — *TEOREMA*.

103. *In un dato punto di una linea retta costruire un angolo uguale ad un angolo dato.* (fig. 23).

Sol. Sia *A* il punto dato nella retta *AC*, e sia *D* l'angolo dato.

Si faccia centro in *D*, e con un raggio ad arbitrio si descriva un arco che tagli i lati dell'angolo ne' punti *E*, ed *F*, e si conduca la corda *EF*. Si faccia poi centro in *A* e con un raggio *AC* = *DE* si descriva un arco indefinito; indi fatto centro in *C*, e con un raggio *CB* = *EF* si descriva un altro arco che tagli il primo nel punto *B*, e si tirino le rette *AB*, *CB*, l'angolo *BAC* sarà uguale all'angolo dato *D*.

Infatti, i due triangoli *ABC*, *DEF* sono uguali, perchè hanno i

tre lati rispettivamente uguali, onde (n° 94) sarà l'angolo $A=D$: Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XXIV — *PROBLEMA.*

104. *Per un punto dato tirare una linea retta parallela ad una retta data.* (fig. 24).

Sol. Sia A il punto dato, e CD la retta data. Si prenda un punto F sopra CD, e si conduca AF; poi si faccia al punto A della retta AF l'angolo BAF uguale all'angolo CFA, la retta AB sarà la parallela richiesta; dappoichè per la costruzione sono uguali gli angoli alterni BAF, AFC. Il che bisognava fare.

CAPITOLO V.

PROPRIETÀ DE' TRIANGOLI.

105. Le relazioni, ch'esistono fra i lati, o fra gli angoli di un triangolo, costituiscono le proprietà di esso. Eccone le principali.

PROPOSIZIONE XXV — *TEOREMA.*

106. *La somma degli angoli di qualunque triangolo è uguale a due angoli retti.* (fig. 25).

Dim. Sia il triangolo ABC, dico che la somma de' tre angoli è uguale a due retti.

Si prolunghi il lato BC in D, e si tiri CE parallela ad AB. Gli angoli ACE, BAC sono uguali come alterni rispetto alla secante AC; rispetto poi alla secante BD, l'angolo esterno ECD è uguale all'interno opposto dalla stessa parte ABC; dunque sarà tutto l'angolo ACD, cioè la somma de' due ACE, ECD, uguale ai due angoli A e B presi insieme: si aggiunga di comune l'angolo ACB, e sarà la somma degli angoli ACD, ACB uguale a quella de' tre angoli del triangolo; ma la prima somma è uguale a due retti (n° 59), dunque lo sarà ancora la seconda. Il che bisognava dimostrare.

107. *Corollario* I. *Se in un triangolo si prolunga un lato, l'angolo esterno è uguale alla somma de'due interni ed opposti; e per conseguenza è maggiore di ciascuno di essi angoli.*

II. *Se due angoli di un triangolo sono uguali a due angoli di un altro, ancora il terzo angolo di questo sarà eguale al terzo di quello.*

Infatti, se dalla somma costante dei tre angoli nell'uno e nell'altro triangolo, si tolgono gli angoli uguali, i residui dovranno essere eguali.

III. *In un triangolo non vi può essere che un solo angolo retto, e con più ragione un solo angolo ottuso.*

108. *Definizione* I. Triangolo *rettangolo* dicesi quello che ha un angolo retto. Il lato opposto all'angolo retto chiamasi *ipotenusa*, gli altri due lati si dicono *cateti*.

Dal che si deduce che nel triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti è eguale ad un retto; e però (n° 61) l'uno è complemento dell'altro.

109. *Definizione* II. Triangolo *ottusangolo* si dice quello che ha un angolo ottuso. Si chiama poi *acutangolo* quello che ha i tre angoli acuti.

La denominazione di triangolo *obliquangolo* comprende il triangolo ottusangolo, e l'acutangolo.

PROPOSIZIONE XXVI — *TEOREMA.*

110. *In un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali* (fig. 26).

Dim. Nel triangolo isoscele AFB sia il lato $FA = FB$; dico che sarà l'angolo $A = B$.

Si divida l'angolo AFB in due parti uguali. I due triangoli AFE, FEB sono uguali, perchè hanno l'angolo AFE uguale all'angolo EFB per costruzione, e sono uguali i lati, che comprendono i detti angoli, dunque sarà il triangolo FAE uguale al triangolo FBE (n° 86); ma ne' triangoli uguali gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali (n° 94); per conseguenza sarà l'angolo $A = B$. Il che bisognava dimostrare.

111. *Corollario.* Dall'uguaglianza de' medesimi triangoli si deduce che il lato $AE = EB$, e che l'angolo $AEF = FEB$, onde questi due angoli sono retti. Quindi « in un triangolo isoscele, la li» nea FE, che divide l'*angolo al vertice* AFB in due parti ugua» li, è perpendicolare alla *base* AB, e passa pel suo punto di mezzo E.

PROPOSIZIONE XXVII — *TEOREMA.*

112. *Se in un triangolo due angoli sono uguali, i lati opposti saranno uguali* (fig. 26).

Dim. Nel triangolo AFB sia l'angolo $A = B$; dico che sarà il lato $AF = FB$.

Dal punto F si conduca la perpendicolare FE sopra AB.

Ne' triangoli AFE, FEB il lato FE è comune, l'angolo $A = B$ per ipotesi, l'angolo $FEA = FEB$ come retti, dunque i due triangoli saranno uguali (n° 88): ma nei triangoli uguali i lati uguali sono opposti agli angoli uguali (n° 94); perciò sarà $FA = FB$. Il che bisognava dimostrare.

113. *Corollario I.* Da questo teorema si deduce che la perpendicolare abbassata dal vertice di un triangolo isoscele sopra la base,

divide l'angolo al vertice in due parti uguali, e passa pel punto di mezzo della base medesima.

114. *Corollario II.* Risulta ancora da questi due ultimi teoremi che un triangolo equilatero è nel tempo stesso *equiangolo*, e reciprocamente un triangolo equiangolo è anche equilatero. Ed il triangolo equilatero avendo i tre angoli eguali fra loro, ciascuno di essi è terza parte di due retti, ossia equivale a due terzi di un angolo retto (n° 106).Quindi il triangolo equilatero è sempre acutangolo, mentre il triangolo isoscele può essere acutangolo, rettangolo , ed ottusangolo , secondo che l'angolo compreso fra i lati uguali è acuto, retto, o ottuso; poichè gli angoli alla base sono sempre acuti.

PROPOSIZIONE XXVIII — *TEOREMA*.

115. *Di due angoli di un triangolo il maggiore è quello, che trovasi opposto ad un lato maggiore.* (fig. 27.)

Dim. Nel triangolo *ABC* sia il lato *CB* maggiore del lato *CA*; dico che sarà l'angolo *CAB* maggiore dell'angolo *CBA*.

Sul lato *CB* si prenda una parte *CD* uguale al lato *CA*; e si tiri la retta *DA*. Essendo isoscele il triangolo *CAD*,gli angoli alla base *AD* sono uguali, e però sarà l'angolo *CAD* uguale all'angolo *CDA* (n° 110). Ma l'angolo *CDA* esterno al triangolo *DBA* è maggiore dell'angolo interno ed opposto *ABD* (n° 107), dunque sarà ancora l'angolo *CAD* maggiore dell'angolo *ABD*, e con più forte ragione lo sarà l'angolo *CAB*. Dunque l'angolo *CAB* è maggiore dell'angolo *CBA* Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XXIX — *TEOREMA*.

116. *Reciprocamente di due lati di un triangolo il maggiore è quello, che trovasi opposto ad un angolo maggiore* (fig. 27).

Dim. Nel triangolo *ABC* sia l'angolo *CAB* maggiore dell'angolo *CBA*: dico che sarà il lato *CB* maggiore del lato *CA*.

Imperocchè, se il lato *CB* non è maggiore del lato *CA*, sarà o uguale o minore : nel primo caso il triangolo sarebbe isoscele, e gli angoli *A*, *B* opposti ai lati uguali sarebbero uguali contro l'ipotesi, e nel secondo caso, l'angolo *CAB* opposto al lato minore *CB* dovrebbe esser minore di *CBA* (n° 115), anche contro l'ipotesi. Dunque il lato *CB* deve esser maggiore del lato *CA*. Il che bisognava dimostrare.

117. *Scolio.* Risulta da questi due ultimi teoremi che il triangolo scaleno può, come l'isoscele, essere rettangolo, ottusangolo, ed acutangolo.

PROPOSIZIONE XXX — *TEOREMA*.

118. *Se pel punto di mezzo* P *di una retta terminata* AB *s'innalzi su questa retta una perpendicolare indefinita* PS.

1.° *Ogni punto* S *di essa perpendicolare sarà equidistante dalle due estremità della retta* AB.

2.° *Ogni punto* M *situato fuori della perpendicolare sarà disugualmente distante dalle stesse estremità* (fig. 28).

Dim. Infatti, si congiunga il punto S con i due punti A, e B. Nei triangoli SAP, SBP il lato $AP = PB$ per supposizione, il lato SP è comune, e l'angolo $APS = BPS$ perchè retti. Quindi (n° 86) il triangolo SAP è uguale al triangolo SBP; e per conseguenza sarà il lato $SA = SB$, ovvero sarà il punto S equidistante dai punti A, e B.

In secondo luogo, se si tirino le rette MA, MP, MB, ne risulteranno i triangoli MAP, MBP, ne' quali il lato MP è comune, il lato $AP=PB$, e l'angolo APM è maggiore dell'angolo BPM, perchè l'uno è ottuso, e l'altro acuto. Epperò sarà il terzo lato MA maggiore del terzo lato MB (n° 90), vale a dire sarà il punto M disugualmente distante dai punti A, e B. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XXXI — *TEOREMA*.

119. *Se da un punto* A *situato fuori di una retta* CD *si conducano su questa retta la perpendicolare* AP, *e differenti oblique* AB, AC, AD;

1.° *La perpendicolare sarà più corta di ogni obliqua.*

2.° *Le oblique* AB, AC, *che si discostano egualmente dal piede* P *della perpendicolare saranno uguali.*

3.° *Di due oblique qualunque* AD, *ed* AB *quella che più si allontana dal piede della perpendicolare sarà la più lunga.* (fig. 29).

Dim. Infatti, 1° nel triangolo ABP l'angolo APB è retto; perciò sarà acuto l'angolo ABP (n° 107); ed il lato AB opposto all'angolo maggiore APB sarà maggiore del lato AP opposto all'angolo minore ABP (n° 116), vale a dire la perpendicolare AP sarà più corta della obliqua AB, e nello stesso modo si dimostrerà che sarà più corta di qualunque altra obliqua.

2° I due triangoli ABP, ACP sono uguali, poichè il lato $BP = PC$ per supposizione, il lato AP è comune, e l'angolo $APB = APC$ come retti. Quindi sarà l'obliqua $AB = AC$.

3° Nel triangolo ADB l'angolo ottuso ABD è maggiore dell'acuto ADB; per conseguenza (n° 116) sarà il lato AD maggiore del lato AB. Il che bisognava dimostrare.

120. *Corollario I.* La perpendicolare misura la vera distanza di un punto ad una retta data, perchè è più corta di ogni obliqua condotta da quel punto alla retta medesima.

121. *Corollario II.* Da un medesimo punto non si possono condurre sopra una retta data più di due rette uguali; perocchè se si potessero condurre tre rette uguali, vi sarebbero da una medesima parte della perpendicolare due oblique uguali; il che non può sussistere.

122. *Scolio* I. Si osservi che se le oblique AB, AC si suppongono uguali fra loro, esse dovranno allontanarsi ugualmente dal piede P della perpendicolare AP; dappoichè essendo in tal caso isoscele il triangolo ABC, la perpendicolare AP deve dividere la base BC in due parti uguali nel punto P (n° 111), onde sarà $BP = PC$.

* 123. *Scolio.* II. Merita ancora di essere notato che si possono descrivere tutte le diverse specie di triangoli, facendo convenevolmente variare la distanza del punto A (fig. 29) dalla retta DC. Infatti:

1° Se la distanza accennata è tale che la obbliqua AB, o la sua eguale AC, sia eguale a BC, il triangolo ABC sarà equilatero. Si è poi veduto (n° 97) che ciò accade quando presi per centri i punti B, e C si descrivono collo stesso raggio BC due archi di cerchio, i quali dovranno incontrarsi in un punto A della perpendiolare AP.

2° Se $AP = BP = PC$, il triangolo ABC sarà isoscele rettangolo. Perocchè in tal caso essendo isosceli i triangoli ABP, ACP, ABC, gli angoli ABP, BAP, PAC, ACP sono tutti eguali fra loro (n° 110). Ma i quattro angoli accennati formano i tre angoli del triángolo ABC, ed equivalgono perciò (n° 106) a due retti: dunque l'angolo BAC, che è la somma de'due angoli BAP, CAP dev' essere uguale ad un angolo retto. Da ciò si potrà facilmente dedurre che quando AP è minore di BP, il triangolo ABC, è isoscele ottusangolo, e quando AP è maggiore di BP, lo stesso triangolo è isoscele acutangolo.

3° Finalmente se AP è uguale, o maggiore di DC, il triangolo ADC sarà scaleno acutangolo. Perocchè, essendo la obliqua AD maggiore della perpendicolare AP, sarà pure maggiore di DC; e per conseguenza (n° 115) l'angolo DCA sarà maggiore dell'angolo DAC. Ma l'angolo DCA è acuto, dunque sarà ancora acuto l'angolo DAC: e siccome l'angolo ADC è esso pure acuto, così ne consegue che il triangolo CAD dev'essere acutangolo. Or essendo la obliqua AD maggiore della perpendicolare $AP = DC$ per ipotesi, sarà il triangolo CAD scaleno acutangolo.

È facile poi vedere che essendo retto l'angolo BAC, quando $AP = BP$, il triangolo CAD risulta in tal caso scaleno ottusangolo. In quanto al triangolo scaleno rettangolo, esso si avrà allorchè essendo $AP > PC$ si faccia l'angolo $DAP = ACP$; dappoichè in tal caso l'angolo PAC essendo complemento di ACP (n° 108), lo sarà pure del suo eguale DAP, e quindi l'angolo DAC sarà retto.

Applicazione delle proprietà precedenti alla risoluzione di alcuni problemi.

PROPOSIZIONE XXXII. — *PROBLEMA.*

124. *Essendo dati due lati di un triangolo, e l'angolo da essi compreso, descrivere il triangolo* (fig. 30).

Soluzione. Si tiri una retta indefinita *DF*, ed al punto *D* si faccia l'angolo *EDF* eguale all'angolo dato; indi sopra le rette *DE*, *DF* si prendano le parti *DG*, *DH* rispettivamente uguali ai lati dati, e si conduca la retta *GH*, il triangolo *DGH* sarà evidentemente il triangolo richiesto. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XXXIII — *PROBLEMA.*

125. *Essendo dati un lato e due angoli di un triangolo, descrivere il triangolo* (fig. 31).

Soluzione. Possono darsi due casi, o il lato dato è adiacente ai due angoli dati, o è adiacente all'uno, ed opposto all'altro.

I. *Caso.* Si conduca una retta *DE* uguale al lato dato; indi si faccia al punto *D* l'angolo *FDE* uguale ad uno degli angoli dati, ed al punto *E* l'angolo *FED* eguale all'angolo rimanente: le rette *DF*, *EF* incontrandosi daranno il triangolo *DFE*, che sarà il triangolo richiesto.

II. *Caso.* Si tiri una retta *AB* eguale al lato dato; poi si faccia l'angolo *CAB* eguale all'angolo adiacente ad *AB*, e finalmente in un punto qualunque *M* della retta *AC* si costruisca l'angolo *AML* eguale all'altro angolo dato: la retta *CB* parallela alla retta *ML* darà il triangolo cercato, perchè in virtù delle parallele l'angolo *AML* è uguale all'angolo *C*. Il che bisognava fare.

126. *Scolio.* È chiaro che gli angoli dati presi insieme debbono essere minori di due retti; altrimenti il triangolo non potrebbe esistere (n° 106).

PROPOSIZIONE XXXIV — *PROBLEMA.*

127. *Essendo dati i tre lati di un triangolo, descrivere il triangolo* (fig 32).

Soluzione. Si tiri una retta indefinita, su cui si prendano le tre parti *MA*, *AB*, *BN* eguali rispettivamente ai tre lati dati, i quali dovranno esser tali che ciascuno sia minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza (n. 83). Ciò premesso, si faccia centro in *A*, e col raggio *AM* si descriva la circonferenza *MCD*, indi si faccia centro in *B*, e col raggio *BN* si descriva la circonferenza *NCD* che incontra la prima nel punto *C*: finalmente si tirino i raggi *CA*, *CB*, il triangolo *ACB* sarà il triangolo richiesto,

perchè AB è uno de'tre lati dati, $AC = AM$ come raggi di un medesimo cerchio, e $CB = BN$ per la stessa ragione.

Resta ora a dimostrare che le due circonferenze accennate devono incontrarsi necessariamente. Or due casi possono darsi, o il lato AB è maggiore di ciascuno degli altri due, o è minore; poichè il caso in cui fosse uguale a ciascuno de'due lati, o ad un solo di questi medesimi lati, si riduce facilmente ai due primi.

Nel primo caso (fig. 32, n. 1), essendo AM minore di AB, la circonferenza MCD deve incontrare la retta MN in un punto E situato tra i punti A e B. Da un'altra parte essendo BN minore di AB, ma maggiore di BE, che è la differenza degli altri due lati AB, AM, perchè $AE = AM$, la circonferenza NCD dovrà incontrare la retta MN in un punto O posto tra i punti A ed E; e per conseguenza risulta evidente l'incontro delle due circonferenze.

Nel secondo caso (fig. 32, n. 2), essendo AM maggiore di AB, ma minore di $AB+BN$, la circonferenza MCD, deve incontrare la retta MN in un punto E situato tra i punti B e N. Da un'altra parte essendo BN maggiore di AB, ma minore di $AB+AM$, la circonferenza NCD dovrà incontrare la retta MN in un punto O situato tra i due A e M; e per consegnenza anche in questo secondo caso è manifesto l'incontro delle due circonferenze. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XXXV — *PROBLEMA*.

* 128. *Essendo dati due lati di un triangolo ed un angolo opposto ad uno di essi, descrivere il triangolo* (fig. 33).

Soluzione. Siano dati i due lati A, B, e l'angolo C opposto ad uno di essi: possono darsi due casi.

I. *Caso*. Se l'angolo dato C è retto, o ottuso, ed è opposto al lato B, che si suppone maggiore di A: in tal caso si faccia l'angolo $MDN = C$, si prenda $DE = A$, indi col centro in E, e con un raggio $= B$ si descriva un arco di cerchio, che taglierà la retta GN in due punti F, G situati a parti contrarie rispetto al punto D. Infatti, abbassando dal punto E sopra GN la perpendicolare EO, questa dovrà cadere nell'angolo acuto EDG, e vi saranno due oblique uguali EF, EG situate come nella figura, essendosi supposta ED minore di EF, ovvero di B. Da questa costruzione si hanno dunque due triangoli EDF, EDG, ma solo il primo risolve il problema nel senso preciso dell'enunciato, perchè l'angolo EDG del secondo non è l'angolo dato, ma il supplemento di quello.

È poi evidente che nel caso dell'angolo retto, si potrà prendere uno qualunque de' due trangoli EDF, EDG; e che se il lato opposto B fosse minore o uguale ad A, il problema sarebbe impossibile nel caso dell'angolo retto, o dell'angolo ottuso.

II. *Caso*. Se l'angolo dato C è acuto, ed il lato opposto B seguiti ad esser maggiore di A, la costruzione precedente ha sempre luogo; e qui pure si vede che si hanno due triangoli, de'quali un solo soddisfà a tutte le condizioni del problema.

Ma se C è acuto, e B minore di A, in tal caso si faccia (fig. 34) l'angolo $RKQ = C$, si prenda $KI = A$; indi col centro in I, e con un raggio $= B$ si descriva un arco di cerchio, il quale dovrà tagliare la retta KQ in due punti L,e P situati da una medesima parte rispetto al punto K. Infatti, abbassando la perpendicolare IM sopra KQ è manifesto che vi devono essere due oblique uguali tra loro IL,ed IP situate come nella figura,essendosi supposta IK maggiore di IL. Laonde con la costruzione precedente si avranno due triangoli ILK, IPK, i quali soddisferanno ambidue al problema proposto. Il che bisognava fare.

* 129. *Scolio* I. Apparisce dalle cose precedenti che qualunque sia l'angolo C, cioè retto, ottuso, o acuto, il problema proposto non potrà risolversi, se il lato B opposto all'angolo C *fosse minore* della perpendicolare EO (fig. 33) abbassata dalla estremità E del lato adiacente sulla retta indefinita GN, perchè l'arco descritto col raggio B non incontrerebbe quella retta.

* 130. *Scolio* II. È facile vedere che se si volesse stare alla generalità della geometria, e non si volesse considerare il caso particolare del triangolo, il problema precedente dovrebbe esser enunciato nel modo seguente (fig. 33).

Essendo dato un angolo qualunque MDN, *e presa sopra* DM *una parte* DE *uguale ad una retta data, trovare sulla retta indefinita* GN *un punto* F *tale che la congiungente* EF *risulti di data grandezza.*

* 131. *Scolio* III. Merita ancora di esser notato che i quattro problemi precedenti si comprendono nel seguente problema generale.

Costruire un triagolo essendo dati tre de'suoi elementi, che sono i tre lati ed i tre angoli, tra i quali vi sia almeno un lato.

Nella combinazione de' dati necessarii per poter descrivere un triangolo vi dev'essere almeno un lato, perchè se fossero dati solamente i tre angoli A, B, C, il problema sarebbe *indeterminato*, cioè si potrebbero costruire infiniti triangoli differenti. Infatti (fig. 31), se si tiri una retta DE ad arbitrio, e si faccia al punto D l'angolo $FDE = A$, ed al punto E l'angolo $FED = B$, il terzo angolo DFE del triangolo, che ne risulta, sarà eguale al terzo angolo dato C.(n.° 107). Quindi facendo variare la lunghezza della retta DE si avranno infiniti triangoli equiangoli fra loro, ma non eguali; e perciò il problema resta indeterminato.

CAPITOLO VI.

DE' POLIGONI.

132. *Definizione* I. Un piano terminato d'ogni intorno da linee chiamasi *figura piana*.

133. II. Se le linee sono rette, la figura piana si dirà *rettilinea*, o più brevemente *poligono* (fig. 35).

134. III. Se le linee sono curve la figura piana si dirà *curvilinea*. Il cerchio è la sola figura curvilinea che si considera negli elementi di geometria.

135. IV. Finalmente se le linee sono rette e curve, la figura piana si chiamerà *mistilinea* (fig. 1.)

136. V. Le rette *AB*, *BC*, *CD*, ecc.(fig.35) che terminano il poligono, diconsi *lati*, i vertici degli angoli *ABC*, *BCD*, *CDE*, ecc. formati da questi lati sono i *vertici* del poligono.

137. VI. Ogni retta, *AC*, *AD*, *AE*, ecc., che unisce i vertici di due angoli non adiacenti, dicesi *diagonale* del poligono.

138. VII. L'insieme de'lati del poligono forma il suo *contorno* o *perimetro*. Se i lati sono uguali, il poligono dicesi *equilatero*; se sono uguali gli angoli, si chiama *equiangolo*.

139. VIII. Il poligono equilatero ed equiangolo prende il nome di *poligono regolare*.

140. IX. Due poligoni sono *equilateri fra loro*, quando hanno i lati respettivamente uguali, e disposti nel medesimo ordine. Sono poi *equiangoli fra loro*, quando hanno gli angoli respettivamente uguali e disposti nel medesimo ordine.

141. X. I poligoni prendono nomi diversi, secondo il numero dei loro lati. Il poligono di tre lati è il triangolo, di cui si è parlato ne' capitoli precedenti : quello di quattro lati chiamasi *quadrilatero*, quello di cinque *pentagono*, di sei *esagono*, di sette, *ettagono*, di otto, *ottagono*, di nove, *enneagono*, di dieci, *decagono*, di dodici, *dodecagono*, di quindici, *quindecagono* o *pentedecagono*. Per tutti gli altri poligoni non si adoperano nomi derivati dalla lingua greca ; ma si enuncia il numero dei lati; e però si dice un poligono di 11, di 13, di 14, di 16, di 17 lati ecc.

142. Nella geometria elementare si considerano solamente i *poligoni convessi*, cioè quelli che non hanno angoli *rientranti*. La fig. 35 rappresenta un poligono convesso , quello dinotato dalla fig. 36 contiene l'angolo rientrante *DEF*.

143. Il poligono convesso è tale che il suo perimetro non può essere segato dai prolungamenti dei suoi lati, al contrario quello del *poligono concavo*, o ad angoli rientranti, può essere segato in due o più punti quando si prolunghi qualche suo lato sufficientemente.

PROPOSIZIONE XXXVI — TEOREMA.

144. ***La somma di tutti gli angoli interni di un poligono è uguale a tante volte due angoli retti, quante unità sono nel numero dei suoi lati meno due*** (fig. 35).

Dim. Sia *ABCDF* il poligono proposto: se dal vertice d' un medesimo angolo *A* si conducano a tutti i vertici degli angoli opposti le diagonali *AC* , *AD* , *AE* è manifesto che il poligono sarà diviso in cinque triangoli, se ha sette lati; in sei triangoli, se ha otto

lati ; ed in generale in tanti triangoli quanti sono i lati del poligono meno due ; dappoichè questi triangoli possono essere considerati come aventi per vertice comune il punto A , e per basi i differenti lati del poligono, eccetto i due, che formano l' angolo A. Or la somma degli angoli di tutti questi triangoli equivale evidentemente alla somma degli angoli del poligono ; dunque questa somma è uguale a tante volte due angoli retti quanti sono i triangoli, vale a dire quante unità sono nel numero de' lati del poligono meno due. Il che bisognava dimostrare (*)

145. *Corollario* I. Da questo teorema si deduce che nel quadrilatero la somma degli angoli è uguale a 4 angoli retti ; nel pentagono è uguale a 6 angoli retti ; nell' esagono è eguale a 8 angoli retti, nell' ottagono a 12 angoli retti ; nel decagono a 16, ec..., ed in generale se n è il numero de' lati del poligono , ed R l' angolo retto, la somma degli angoli sarà espressa da (n-2) $\times 2R$, o sia da $n \times 2R - 4R$, o in altri termini :

La somma di tutti gli angoli di un poligono è uguale a tante volte due angoli retti, quanti sono i lati, meno quattro angoli retti.

146. *Corollario* II. Quando il poligono è regolare, ciascuno dei suoi angoli sarà uguale al valore della somma di essi angoli diviso pel loro numero. Epperò un angolo di un poligono regolare di tre lati sarà uguale a $\frac{2}{3}$ di un angolo retto, quello di un poligono regolare di 4 lati sarà uguale ad un retto, quello di un pentagono regolare sarà $\frac{6}{5}$ di un retto, quello di un esagono regolare. $\frac{8}{6}$ di un retto, ec..

147. *Corollario* III. Reciprocamente, se si conoscesse la somma degli angoli di un poligono, si potrebbe determinare il numero de' suoi lati. Se per esempio, questa somma equivale a 30 angoli retti, la metà di questo numero, o 15, dinota il numero de' lati del poligono diminuito di due ; il poligono ha dunque 17 lati.

PROPOSIZIONE XXXVII — *TEOREMA.*

148. *Se i lati di un poligono* ABCDE *si prolunghino ordinatamente verso una medesima parte, la somma di tutti gli angoli esterni* CBm, DCn, pDE, ecc. *sarà uguale a quattro angoli retti.* (fig. 37).

Dim. Imperocchè ogni angolo esterno CBm fa coll' interno adiacente ABC due angoli retti ; e però tutti gli angoli esterni insieme con tutti gl' interni sono uguali a tante volte due retti, quante uni-

(*) Se dal punto E (fig. 36) si tirino le diagonali a tutti i vertici del poligono, l'angolo rientrante E sarà composto degli angoli consecutivi FEG, GEA, AEB, BEC, CED, i quali un ti all'angolo FED formano quattro angoli retti (n.64).Quindi il teorema dimostrato qui sopra potrebbe applicarsi al poligono che ha un angolo rientrante, purchè si consideri questo angolo non già secondo la definizione (n. 48), ma come l'eccesso di quattro retti sull'angolo FED.

tà vi sono nel numero de' lati del poligono. Ma tutti gli angoli interni sono uguali a tante volte due retti, quanti sono i lati meno quattro reti (n° 145). Se dunque si tolgono gl' interni, resteranno gli esterni uguali a quattro angoli retti. Il che bisognava dimostrare.

Delle condizioni che determinano i poligoni.

* 149. Esistono per i poligoni in generale, come per i triangoli, alcuni caratteri, dai quali si può dedurre la loro uguaglianza. E poichè siffatti caratteri equivalgono alle condizioni necessarie e sufficienti a determinare un poligono, così ci occuperemo qui appresso di alcune di queste condizioni, dalle quali si potranno, ove si voglia, ricavare facilmente i caratteri corrispondenti dell' uguaglianza dei poligoni.

PROPOSIZIONE XXXVIII — *TEOREMA.*

* 150. *Un poligono* ABCDEF *è determinato, quando si conoscono tutti i suoi lati, e tutte le diagonali* AC, AD, AE, *che partono da un medesimo vertice* A (fig. 35).

Dim. Imperciocchè, è manifesto che se saranno determinati tutti i triangoli in cui si divide il poligono, esso potrà comporsi riunendo insieme quelli triangoli, e quindi risulterà determinato. Or essendo dati tutti i lati del poligono, e tutte le diagonali che partono da un medesimo vertice, ciascuno triangolo *ABC*, *ACD*, ecc. trovasi determinato dai suoi tre lati: dunque il poligono è determinato. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XXXIX — *TEOREMA.*

* 151 *Un poligono* ABCDEF *è determinato quando si conoscono tutti i suoi lati, e tutti i suoi angoli consecutivi* ABC, BCD, *ecc; eccetto i tre ultimi* DEF, EFA, FAB (fig. 35).

Dim. Infatti, il triangolo *ABC* si trova determinato dall'angolo *B*, e dai lati *AB*, *BC* che lo comprendono. Quindi si conoscerà l'angolo *BCA*, ed il lato *AC*. Ma l'angolo *BCD* è dato per ipotesi, dunque sarà ancora dato l'angolo *ACD*, ed i lati *AC*, *DC* che lo comprendono; e per conseguenza il triangolo *ACD* si trova determinato. Nello stesso modo si dimostrerà che tutti i triangoli consecutivi sono determinati, eccetto l'ultimo *AFE*, che sarà determinato dai suoi tre lati, senza che sia necessario conoscere gli angoli *DEF*, *EFA*, *FAB*. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XL — *TEOREMA*.

* 152. *Un poligono* ABCDEF *è determinato, quando si conoscono tutti i suoi lati, e tutti i suoi angoli, eccetto i due lati* EF, FA, *e l angolo* F *compreso da questi lati* (fig. 35).

Dim. Perocchè si dimostra, come nella proposizione precedente, che tutti i triangoli consecutivi *ABC*, *ACD*, ecc. si trovano determinati, eccetto l'ultimo *AFE*, il quale sarà determinato dal lato *AE*, e dagli angoli *FAE*, *AEF* adiacenti a questo lato, ottenendosi l'angolo *FAE* con togliere dall'angolo dato *FAB* la somma degli angoli in *A* dei triangoli precedenti. Dunque tutto il poligono è determinato. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XLI — *TEOREMA*.

* 153. *Un poligono* ABCDEF *è determinato, quando si conoscano tutti i suoi lati, e tutti i suoi angoli, eccetto il lato* AF, *ed i due angoli adiacenti a questo lato* (fig. 35).

Dim. Infatti si dimostra, come nella proposizione precedente, che tutti i triangoli consecutivi *ABC*, *ACD*, ecc. sono determinati eccetto l' ultimo *AFE*, che sarà determinato dai lati *AE*, *FE*, e dall' angolo *AEF* contenuto da questi lati. Dunque tutto il poligono è determinato. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XLII — *TEOREMA*.

* 154. *Un poligono* ABCDE *è determinato, quando si conosce uno de' suoi lati* AB, *e tutti gli angoli che questo lato fa con i lati e le diagonali che partono dalle sue estremità* (fig. 38).

Dim. Imperciocchè, ciascun vertice *C*, *D*, *E* si trova legato al lato dato *AB* per mezzo di un triangolo *ACB*, *ADB*, *AEB*, nel quale si conosce il lato accennato *AB*, ed i due angoli ad esso adiacenti. Quindi tutti i vertici del poligono si trovano determinati; e però tutto il poligono sarà pure determinato. Il che bisognava dimostrare.

* 155. *Scolio I.* Quando si è detto (n° 93) che un triangolo è determinato dai suoi tre lati, si avrebbe potuto dire in un modo più generale che un triangolo è determinato dai suoi 6 elementi, che sono i lati e gli angoli, meno tre angoli, come avviene in tutti i poligoni. Parimente si potrebbe dire che un triangolo è determinato da tutti i suoi elementi, meno due lati e l'angolo da questi compreso, oppure meno un lato ed i due angoli adiacenti a questo lato, il che ha luogo in tutti i poligoni. Da ciò si deduce in generale che un poligono qualunque, triangolo, quadrilatero, pentagono, ecc. è determinato da tutti i suoi elementi meno tre, salvo

alcune eccezioni, delle quali rispetto al triangolo si è già parlato (n.° 129). Quindi se si rappresenta con *n* il numero de'lati di un poligono qualunque, *2n* rappresenterà il numero totale de'suoi elementi; per conseguenza il numero dei dati necessarii alla determinazione di un poligono sarà espresso da *2n-3*. Dal che ne segue esser necessarii *10-3*, o *7* dati per un pentagono; *12-3*, o *9* per un esagono, e così in progresso.

* 156. *Scolio II*. Dalle cose precedenti apparisce la corrispondenza ch' esiste fra le condizioni, che determinano i triangoli, e quelle che determinano i poligoni in generale. Rimane ora a dire qualche cosa intorno alle proprietà de' poligoni relativamente a quelle che appartengono ai triangoli. Si è dimostrato che quando in un triangolo vi sono lati uguali, vi devono essere ancora angoli uguali, e reciprocamente. Si è dimostrato ancora che quando in un triangolo si trovano lati disuguali, vi devono essere ancora angoli disuguali, e reciprocamente. Queste proprietà non hanno luogo necessariamente negli altri poligoni. La maggior parte di essi possono avere tutti i loro lati uguali e tutti i loro angoli disuguali, oppure tutti i loro angoli uguali e tutti i loro lati disuguali. Da ciò si deduce che in un poligono può aver luogo un cangiamento in tutti gli angoli, o in alcuni di essi, senza che vi sia cangiamento ne'lati, e che vi possa essere cangiamento in tutti i lati, o in alcuni di essi, senza che vi sia cangiamento negli angoli. Ciò si vedrà chiaramente in appresso.

CAPITOLO VII.

DEI QUADRILATERI.

157. Fra i quadrilateri se ne trovano alcuni di forma particolare, che meritano di essere specialmente considerati; dappoichè godono di molte proprietà importanti.

158. *Definizione* I. Si chiama *Trapezio* il quadrilatero, che ha due soli lati paralleli.

159. Da ciò segue che essendo nel trapezio *ABCD* (fig. 39), paralleli i lati opposti *AB*, *DC*, gli angoli *A* e *D* devono essere supplementarj (n° 61), come pure gli angoli *B* e *C*.

Si deduce ancora che se l' angolo *A* è retto (fig. 40), l'angolo *D* sarà ancora retto.

160. *Definizione* II. Il quadrilatero, che ha i lati opposti paralleli, dicesi *parallelogrammo*.

La fig. 41 rappresenta un parallelogrammo, nel quale i lati opposti *AB*, *DC* sono paralleli, come pure i lati *AD*, *BC*.

161. *Definizione* III. Si chiama *Parallelogrammo rettangolo*, o più semplicemente *rettangolo*, il quadrilatero che ha gli angoli retti, senza avere i lati uguali (fig. 42).

162. *Definizione* IV. Il quadrilatero, che ha i lati uguali senza avere gli angoli retti, dicesi *rombo*: si dà ancora a questa figura il nome di *losanga* (fig. 43).

163. *Definizione* V. Si chiama *quadrato* il quadrilatero che ha i lati uguali, e gli angoli retti (fig. 44).

PROPOSIZIONE XLIII — *TEOREMA*.

164. *In ogni parallelogrammo i lati opposti sono uguali, come pure gli angoli opposti; e la diagonale lo divide in due parti uguali* (fig. 41).

Dim. Nel parallelogrammo $ABCD$ si conduca la diagonale BD. Essendo AD parallela a BC saranno uguali gli angoli alterni ADB, DBC: parimente essendo DC parallela ad AB, saranno uguali gli angoli alterni ABD, BDC. Quindi sarà il triangolo ABD uguale al triangolo BDC, perchè hanno il lato BD comune, e gli angoli adiacenti a questo lato rispettivamente uguali. Ma ne' triangoli uguali i lati uguali sono opposti agli angoli uguali, e reciprocamente gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali, dunque sarà il lato $AD = BC$, il lato $AB = CD$, l'angolo $A = C$, e finalmente l'angolo ABC, composto de' due angoli ABD, DBC, eguaglierà l' angolo ADC composto dei due BDC, ADB. Il che bisognava dimostrare.

165. *Corollario. Due rette parallele* AB, CD (fig. 41) *comprese fra due altre parallele* AD, BC *sono uguali.*

Perocchè in tal caso la figura $ABCD$ è un parallelogrammo.

PROPOSIZIONE. XLIV — *TEOREMA*.

166. *Due parallele sono equidistanti* (fig. 42).

Dim. Siano AB, CD due rette parallele. Sulla prima s' innalzino le due perpendicolari AC, BD, queste dovranno essere ancora perpendicolari all' altra (n° 76) ; e perciò ciascuna di esse misura la distanza scambievole delle due parallele. Ma $AC = BD$, perchè la figura $ACDB$ è un parallelogrammo, dunque le due parallele AB, CD prolungate indefinitamente dall' una e dall' altra parte saranno sempre equidistanti. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XLV — *TEOREMA*.

167. *Se in un quadrilatero i lati opposti sono uguali, la figura sarà un parallelogrammo* (fig. 41).

Dim. Nel quadrilatero $ABCD$ sia il lato $AB = DC$, il lato $AD = BC$. Dico che la figura accennata è un parallelogrammo.

Imperocchè se si conduca la diagonale BD, i due triangoli ABD, BCD saranno uguali, perchè hanno i tre lati respettivamente uguali (n° 92). Quindi l' angolo ADB opposto al lato AB sarà uguale al-

l' angolo DBC opposto al lato CD: ma questi angoli sono alterni rispetto alle rette AD, BC, dunque queste rette sono parallele (n°69). Nello stesso modo si dimostra che AB è parallela a CD, e però il quadrilatero $ABCD$ è un prallelogrammo. Il che si doveva dimostrare.

PROPOSIZIONE XLVI — *TEOREMA.*

168. *Se due lati opposti di un quadrilatero sono uguali e paralleli, la figura sarà un parallelogrammo* (fig. 41)

Dim. Nel quadrilatero $ABCD$ sia il lato AB uguale e parallelo al lato DC. Dico che la figura $ABCD$ sarà un parallelogrammo.

Si tiri la diagonale BD. E poichè AB è uguale e parallela a DC, gli angoli alterni ABD, BDC saranno uguali (n° 75). Quindi i due triangoli ABD, CDB hanno il lato BD comune, il lato $AB = DC$, e l' angolo compreso dai due primi uguale all' angolo compreso dai due secondi; perciò i due triangoli sono uguali, e sarà il lato $AD = BC$. Ma quando in un quadrilatero i lati opposti sono uguali, la figura è un parallelogrammo (n° 167) ; dunque il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogrammo. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XLVII — *TEOREMA.*

169. *Le diagonali d' un parallelogrammo si tagliano scambievolmente in due parti uguali* (fig. 45).

Dim. Sia il parallelogrammo $ABCD$. Dico che le due diagonali AC, DB si tagliano scambievolmente in due parti uguali.

Infatti, nei due triangoli ADO, BCO i lati AD, CB sono uguali come lati opposti del parallelogrammo; l'angolo ADO è uguale all'angolo OBC come alterni rispetto alle parallele AD, BC, e l'angolo $OAD = OCB$ per la stessa ragione, dunque i due triangoli ADO, BOC sono uguali (n° 88); e perciò sarà $AO = OC$, e $DO = OB$ (n° 94). Il che bisognava dimostrare.

170. *Scolio I.* Nel rettangolo $ABCD$ (fig.42) le due diagonali non solo si tagliano scambievolmente in parti uguali, ma sono ancora uguali fra loro. Perocchè sono uguali i due triangoli ABC. BAD, essendo il lato AB comune, il lato $AC = BD$, e l'angolo $CAB = ABD$ come retti.

171. *Scolio II.* Nel rombo (fig. 43) le due diagonali sono disuguali, ma si tagliano ad angoli retti. Perocchè essendo i punti B, e D ugualmente distanti dalle estremità della retta AC, la retta BD, che divide per metà la AC è ad essa perpendicolare (n° 118).

172. *Scolio III.* Dalle cose precedenti risulta che nel quadrato (fig. 44.) le due diagonali sono uguali, e si tagliano ad angoli retti.

PROPOSIZIONE XLVIII — TEOREMA.

173. *Costruire un parallelogrammo, essendo dati un angolo, ed i due lati che lo comprendono* (fig. 41).

Sol. Si faccia l' angolo A uguale all'angolo dato ; poi su i lati di esso si prendano le due parti AB, AD uguali respettivamente ai due lati dati. Ciò fatto dal punto B si tiri BC parallela ad AD, e dal punto D si tiri DC parallela ad AB. La figura $ABCD$ sarà evidentemente il parallelogrammo richiesto. Il che bisognava fare.

174. *Scolio I.* Si osservi che se l' angolo BAD è retto, la figura $ABCD$ diviene un rettangolo ; e se di più i lati AB, AD sono uguali, la stessa figura diverrà un quadrato. Si può dunque con la costruzione indicata descrivere un rettangolo, di cui sono dati due lati che comprendono l'angolo retto, e costruire un quadrato sopra una retta data.

175. *Scolio II.* È facile vedere che il rettangolo si può ancora costruire in un altro modo. Infatti si tiri una retta AB (fig. 42) uguale ad uno de' due lati adiacenti dati , indi alle due estremità di questa retta s' innalzino le perpendicolari AC, BD, ciascuna delle quali si faccia uguale all' altro lato adiacente dato, e si congiunga infine il punto C col punto D, la figura $ABDC$ sarà il rettangolo richiesto in virtù delle proposizioni precedenti.

176. *Scolio III.* Con la costruzione indicata nello scolio precedente si può sopra una data retta AB (fig. 41) descrivere il quadrato ; solamente dovrà farsi ciascuna delle due perpendicolari AD, BC uguale al lato dato AB.

CAPITOLO VIII.

DELLE RAGIONI E DELLE PROPORZIONI IN GENERALE.

177. Il principio *dell'esatta soprapposizione* (n° 39) applicato ai triangoli, e le conseguenze che ne abbiamo dedotte, sono state sufficienti a farci scoprire alcune proprietà delle figure piane rettilinee, le quali proprietà si potrebbero chiamare *costitutive* delle figure medesime, in quanto che servono alla loro descrizione geometrica. In tal modo abbiam riconosciuta la possibilità di descrivere tutte le specie di triangoli (n° 121), indi quella di descrivere tutti i poligoni in generale, ed in particolare il trapezio, il parallelogrammo, il rettangolo, il quadrato, il rombo o losanga.

178. Ma quando si vogliono paragonare generalmente le stesse figure tra loro, per valutare le une per mezzo delle altre, allora il principio summentovato dell'esatta soprapposizione non basta più esso solo, e conviene ricorrere alla teorica generale delle ragioni e delle proporzioni. Or siccome ogni grandezza (n° 5) si può ridurre a numero paragonandola ad un'altra della stessa specie presa per unità, così ne consegue che la teorica accennata appartiene

propriamente all'Aritmetica, o piuttosto all'Algebra; ciò non ostante essa verrà esposta qui appresso, affinchè si possa conoscere in qual modo debba adoperarsi nell'applicarla alla quantità continua.

DELLA RAGIONE.

179. Due grandezze non possono paragonarsi l'una all'altra rispetto alla loro quantità se non sono *omogenee*, vale a dire della stessa specie o natura: così una linea non potrà paragonarsi ad una superficie, o ad un solido, ma si paragonerà la linea alla linea, la superficie alla superficie, il solido al solido.

180. Di due grandezze omogenee la minore moltiplicata quanto basta deve alla fine superare la maggiore; e questa proprietà appartenendo esclusivamente alle grandezze omogenee, è stata con ragione da alcuni matematici adottata per carattere distintivo di quelle grandezze.

181. *Definizione* I. Tra due grandezze omogenee disuguali, la maggiore si dice *moltiplice* della minore, quando la minore presa più volte eguaglia la maggiore.

182. *Definizioni* II. *Parte aliquota*, o *summoltiplice* si dice la minore di due grandezze omogenee disuguali, allorchè può esser contenuta un certo numero di volte esattamente nella maggiore.

183. *Definizione* III. *Parte aliquanta* si dirà quella grandezza minore, che non può essere contenuta un certo numero di volte esattamente nella maggiore.

184. *Definizione* IV. S'intende per *comune misura* di due grandezze omogenee una grandezza omogenea con le prime due, ed aliquota di ciascuna di loro.

185. Se dunque una grandezza D è una comune misura di due altre grandezze A e B, ogni parte aliquota di D sarà ancora una comune misura di A e B.

Inoltre è manifesto che se D è comune misura di A, e di una sua parte, lo sarà ancora della rimanente parte.

186. *Definizione* V. Due grandezze omogenee si dicono commensurabili fra loro, quando hanno una comune misura.

187. Per esempio, una linea di 25 palmi, ed una di 10 sono grandezze commensurabili, perchè hanno per comune misura una linea di 5 palmi, la quale è parte aliquota di ciascuna di loro, entrando il 5 esattamente cinque volte nel 25, e due volte nel 10. Così pure una linea di 10 palmi e mezzo, ed una di 1 palmo sono commensurabili tra loro, perchè hanno per comune misura una linea di un mezzo palmo. Sicchè i numeri interi e fratti sono quantità commensurabili, perchè hanno per comune misura l'unità, o una parte di essa. Quindi si deduce che sono commensurabili fra loro quelle grandezze omogenee, le quali si possono esprimere con numeri interi, o fratti.

188. *Definizione* VI. Due grandezze omogenee si dicono *incommensurabili*, allorchè non hanno una comune misura.

189. Appartengono a questa specie di grandezze le radici quadrate o cubiche de' numeri, che non sono quadrati o cubi perfetti, perchè si dimostra nell'Aritmetica (*) che esse non si possono esprimere esattamente nè con numeri interi, nè con numeri frazionarii, ma solamente si può assegnare il loro valore con quella approssimazione che si vuole. Epperò le radici accennate non possono avere per comune misura l' unità, o una parte dell' unità comunquè si voglia piccola.

190. *Definizione* VII. *Ragione* o *rapporto* di due grandezze omogene A e B dicesi il quoziente, che si ottiene dividendo l' una per l' altra.

191. Per esempio, la ragione di 30 a 6 è $\frac{30}{6}$ ovvero 5, perchè 5 è il quoziente di 30 diviso per 6.

Reciprocamente la ragione di 6 a 30 è $\frac{6}{30}$, ovvero $\frac{1}{5}$; ed in generale la ragione di A a B sarà espressa da $A : B$, oppure da $\frac{A}{B}$.

192. Da ciò si deduce che la ragione di due grandezze omogenee è un numero, o una frazione, di cui i termini sono espressi dai numeri delle misure comuni contenute nelle due grandezze accennate allorchè si paragonano l' una con l' altra.

Abbenchè la frazione, di cui è parola, non possa esprimersi esattamente nel caso del rapporto incommensurabile, perchè niuna frazione può esprimere esattamente un rapporto incommensurabile, pure essa esiste, dappoichè, come più sopra abbiam detto, si può assegnare il valore di un numero incommensurabile, come sarebbe, per esempio, la radice quadrata di 2, con quella approssimazione che si vuole.

193. *Definizione* VIII. Le due grandezze omogenee che si paragonano fra loro diconsi ***termini*** della ragione, ed il primo termine si chiama ***antecedente***, il secondo ***conseguente***. Così nella ragione di A: B, l'antecedente è A, ed il conseguente è B.

194. ***Una ragione non muta valore, quando si moltiplicano, o si dividano i suoi termini per la stessa quantità.***

Perocchè, una ragione equivale ad una frazione, e si sa che una frazione non cambia di valore, quando i termini di essa si moltiplicano, o si dividono per un medesimo numero. Quindi la ragione di 30 : 6 è la stessa che quella di 60: 12, di 15: 3; ed in generale la ragione di A: B equivale a quella di $nA : nB$, indicando con n un numero qualunque.

195. Dalla proposizione precedente s' inferisce che

La ragione di due numeri combinati con frazioni in qualunque modo si può sempre ridurre a quella di due numeri interi.

Abbiasi, per esempio, il rapporto di 8: $\frac{3}{4}$. Riducendo l' intero 8 ad una frazione che ha per denominatore 4, il rapporto accennato sarà uguale a quello di $\frac{32}{4}$: $\frac{3}{4}$. ovvero a quello di 32: 3.

Se il rapporto dato fosse di una frazione ad un' altra, o di una

(*) Vedi l' Aritmetica di *F. Amante* (§ 46).

frazione ad un intero e frazione, è manifesto che in ogni caso si potrà ridurre al rapporto di due frazioni, le quali hanno lo stesso denominatore; e per conseguenza a quello di due numeri interi.

196. Essendo la ragione il quoziente che si ottiene dividendo una grandezza per un'altra dello stesso genere, si dovranno considerare come evidenti le proposizioni seguenti.

1°. Le grandezze che hanno la stessa ragione ad una sola e medesima grandezza, od a grandezze uguali, sono uguali fra loro.

2°. Le grandezze uguali hanno una stessa ragione ad una sola e medesima grandezza.

3°. Le grandezze alle quali una sola e medesima grandezza ha una stessa ragione, sono uguali.

4°. Se due grandezze si paragonano ad una terza, la maggiore sarà quella che vi avrà una maggiore ragione, e viceversa, se una grandezza si paragona a due grandezze disuguali, essa avrà maggior ragione alla grandezza minore.

5°. Le ragioni uguali ad una stessa ragione, o a ragioni uguali, sono uguali fra loro.

197. I termini di una ragione essendo espressi dai numeri delle comuni misure contenute nelle due quantità che si paragonano, ne consegue che per avere la frazione, la quale esprime il rapporto di due linee, basta trovare la massima comune misura di queste medesime linee. Questa ricerca è assai importante, perchè, come si vedrà in appresso, il rapporto di due superficie, ed anche quello di due solidi si può sempre ridurre al rapporto di due linee; ed è questo uno dei più belli risultamenti della geometria.

PROPOSIZIONE XLIX — *PROBLEMA*.

198. *Trovare la massima comune misura, se esiste, di due rette terminate*, AB, CD (fig. 46).

Sol. Se si applica la retta minore CD sopra la maggiore AB quante volte si può, due casi potranno avvenire: o vi sarà contenuta esattamente un certo numero di volte, o vi sarà un resto minore di CD.

Nel primo caso sarà CD la massima comune misura richiesta, e l'operazione sarà terminata; dappoichè non vi può essere una grandezza maggiore di CD, che sia massima comune misura di CD ed AB.

Nel secondo caso supponiamo che CD sia contenuta in AB 2 volte con un resto $B'B$ minore di CD, si avrà

$$AB=2\times CD+B'B.$$

Or dico che se M è la massima comune misura di AB, e CD, la stessa M sarà ancora massima comune misura di CD e $B'B$. Infatti essendo M massima comune misura di AB e CD, lo sarà ancora di AB e di $2\times CD$, vale a dire di AB, e di una sua parte; per conseguenza lo dovrà essere ancora dall'altra parte $B'B$(n°185). Quindi

anto sarà trovare la massima comune misura di AB e CD, quanto sarà trovare la massima comune misura di CD e $B'B$.

Si applichi adunque $B'B$ sopra CD, e se $B'B$ si contiene esattamente in CD, sarà $B'B$ la massima comune misura richiesta. Nel caso contrario si avrà un resto, che si porterà sopra $B'B$ e si continuerà in tal guisa a paragonare ciascun resto col resto precedente; finchè si arrivi a trovare un resto che sia contenuto esattamente nel resto precedente, ed allora questo ultimo resto, siccome più sopra si è dimostrato, sarà la massima comune misura delle due rette date. Il che bisognava fare.

199. *Scolio* I. È facile calcolare quante volte l'ultimo resto, vale dire la massima comune misura, considerata come unità, è contenuta in ciascuna delle due rette date AB, CD (fig. 46).

Per esempio, supponiamo che CD sia contenuta 2 volte in AB con un resto $B'B$, e questo 1 volta in CD con un resto FD; il quale sia contenuto 1 volta in $B'B$ con un resto EB; e finalmente che EB sia contenuto in FD, 2 volte esattamente: sarà EB la massima comune misura delle due linee AB, CD.

Ciò premesso, si faccia $BE = 1$, sarà $FD = 2$, $B'B = 3$, $CD = 5$, e finalmente $AB = 13$. Quindi il rapporto di $AB : CD$ sarà uguale al rapporto di $13 : 5$, vale a dire che se la linea CD si prende per unità, la linea AB sarà $\frac{13}{5}$ di CD, e viceversa se si prende AB per unità, la linea CD sarà $\frac{5}{13}$ di AB.

200. *Scolio* II. È manifesto che un arco di cerchio AE (fig. 2) può essere applicato sopra un arco di cerchio AF dello stesso raggio come una linea retta sopra una linea retta. Quindi se gli archi AF, AE sono commensurabili, si potrà trovare la loro comune misura col procedimento indicato nel problema precedente, e si potrà esprimere in numeri il loro rapporto. Vedremo in appresso che un siffatto rapporto è uguale a quello degli angoli ACF, ACE; e per conseguenza se due angoli sono commensurabili, si può trovare la loro comune misura, ed avere l'espressione numerica del loro rapporto.

201. *Scolio* III. Applicando lo stesso procedimento a due linee qualunque può accadere che non si trovi mai un resto, che sia contenuto esattamente nel resto precedente; allora le linee non hanno comune misura, o sia sono incommensurabili (n.° 188). La ricerca del rapporto della diagonale al lato del quadrato, di cui ci occuperemo or ora, non solo offre un esempio della esistenza delle linee incommensurabili, ma fa conoscere che il procedimento sopranominato è geometrico, e non meccanico, come potrebbe sembrare a prima vista.

PROPOSIZIONE L — LEMMA.

* 202. *In un triangolo rettangolo isoscele* BAC, *se si divida in due parti eguali un angolo acuto* ABC *per mezzo della retta* BD, *e dal punto* D *si conduca* DE *parallela*, *e* DF *perpendicolare alla base* BC, *i triangoli* EAD, DEC *saranno isosceli ed uguali* (fig. 47).

Dim. Infatti, il triangolo ABD è uguale al triangolo BFD, perchè il lato BD è comune, l'angolo retto BAD è uguale all'angolo retto BFD, e l'angolo $ABD = DBF$ per costruzione (n° 88); per conseguenza sarà il lato $AD = DF$ ed il lato $AB = BF$. Or essendo DE parallela a BC, l'angolo esterno AED sarà uguale all'interno opposto ABC, e così pure sarà l'angolo $ADE = ACB$. Ma l'angolo $ABC = ACB$, perchè il triangolo ABC è isoscele, dunque sarà ancora isoscele il triangolo AED; e sarà di più uguale al triangolo DFC; dappoicchè il lato $DF = AD$, come si è già dimostrato, l'angolo $FCD = ADE$ e l'angolo retto $DFC = DAE$ (n° 88). Il che bisognava dimostrare.

* 203. *Corollario.* Essendo isosceli ed uguali i triangoli AED, DFC si avrà $DF = FC = AE = AD$, e sarà inoltre $ED = DC$, ma $DC = EB$, dunque sarà anche $ED = EB$.

* 204. *Scolio.* Se la costruzione indicata nel lemma precedente si applica al triangolo EAD, cioè si divida l'angolo AED in due parti uguali per mezzo della retta EH, indi si conduca HO perpendicolare, e HL parallela ad ED, si dimostrerà come più sopra che $AE = EO$, $AH = HO$, il triangolo ALH uguale al triangolo HOD, ecc. . . La stessa costruzione si potrebbe applicare al triangolo ALH, indi al triangolo seguente, e così all'infinito.

PROPOSIZIONE LI — *PROBLEMA.*

* 205. ***Trovare il rapporto della diagonale al lato del quadrato*** (fig. 47.).

Soluzione. Il triangolo rettangolo isoscele ABC potendosi considerare come la metà di un quadrato (n° 164), così sarà BC la diagonale, ed AB, o pure AC, un lato di questo quadrato.

Ciò premesso, si porti il lato AB sopra la diagonale BC del quadrato proposto; ed essendo $AB = BF$, il lato AB sarà contenuto una sola volta nella diagonale col resto FC, che sarà minore di AB, perchè $FC = AD$, ed AD è parte di $AC = AB$. Si porti nuovamente il resto FC sopra AB. Essendo AB composta di AE e di EB, o ciò che vale lo stesso di AE e di ED, ed essendo $AE = OE$, la retta AB conterrà due volte la retta AE con un resto OD minore di AE, ossia conterrà due volte il primo resto FC con un secondo resto OD minore di FC. Se questo secondo resto OD si porti sopra FC, ovvero sopra AE, si dimostrerà similmente che vi è contenuto due volte con un resto GH minore di OD: ed il paragone successivo de' residui ognora più piccoli dovendo dare sempre lo stesso risultamento, perchè i triangoli rettangoli isosceli AED, ALH, ecc. . , con le rispettive costruzioni in essi eseguite, sono tutti nelle identiche condizioni del primo triangolo ABC, ne segue che l'operazione non avrà mai fine, e si potrà arrivare ad un resto tanto piccolo quanto si voglia, senza che sia contenuto mai esattamente nel resto precedente. Laonde la diagonale BC, ed il lato AB del quadrato non potranno mai avere una parte aliquota comune per quanto si voglia piccola; e per conse-

guenza sono incommensurabili fra loro (n° 188). Il che bisognava fare.

* 206. *Scolio* I. Non è dunque possibile di esprimere per mezzo di numeri il rapporto esatto della diagonale al lato del quadrato ; ciò non ostante si può sempre assegnarlo con quella approsimazione che si vuole.

Infatti la prima operazione ha dato 1 per quoziente, la seconda ha dato 2, e si è dimostrato che tutte le altre all' infinito daranno sempre 2, per conseguenza si potrà formare una frazione continua, la quale sarà (*).

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$$, ecc. all'infinito.

Ciò posto, supponiamo che questa frazione sia stata calcolata sino al quarto termine inclusivamente, si troverà il suo valore uguale ad $1\,\frac{12}{29}$, ovvero a $\frac{41}{29}$. Sicchè il rappporto approssimato della diagonale al lato del quadrato equivale a 41 : 29. L'approsimazione si potrà spingere tanto quanto si vuole calcolando un maggior numero di termini.

Noi vedremo in appresso che facendo il lato del quadrato $AB = 1$, la sua diagonale sarà espressa dalla radice quadrata di 2, che si scrive $\sqrt{2}$. Quindi il rapporto della diagonale al lato del quadrato è $\sqrt{2} : 1$, il quale rapporto è un *limite*, cui continuamente si accostano, senza raggiungerlo mai, tutti i moltiplici e successivi rapporti che possono formarsi colla frazione continua mentovata e coll' unità.

* 207. *Scolio II*. Da quanto precede apparisce chiaramente che la circostanza di non potersi assegnare il preciso valore di un rapporto incommensurabile non cambia la natura di un tal rapporto, il quale dovrà sempre considerarsi come il quoziente di una divisione ; o come una frazione, di cui i termini sono espressi da numeri incommensurabili fra loro.

Quindi si deduce che ogni grandezza può ridursi a numero, paragonandola ad un' altra della stessa specie presa per unità ; dappoichè sarà espressa o da un numero intero, o da un numero frazionario, o da un numero incommensurabile, stante che il numero non è tanto la collezione di più unità, quanto il rapporto astratto di qualsivoglia grandezza ad un' altra della stessa specie che si prende per unità ; dimodochè non si può avere idea compiuta del numero senza che si abbia prima idea del rapporto (**).

* 208. *Scolio III*. I principii sinora esposti possono condurre ad un' altra generalità intorno al modo di considerare la ragione geometrica. Si è veduto (n° 199) che il rapporto di due grandezze commensurabili si può ridurre a quello di due numeri con cercare

---

(*) Vedi l'Aritmetica di *F. Amante* (n° 40).

(**) Newton. *Arith. Univer.* pag. 2.

la massima comune misura fra di esse; e che questo procedimento si applica anche alle grandezze incommensurabili (n° 206) , con la sola differenza che l'operazione non ha termine. Dunque , uno è il modo di ridurre il rapporto di due grandezze qualunque al rapporto di due numeri interi, cioè quello di cercare la massima comune misura fra le due grandezze: o l'operazione ha termine , o non ha termine , ma nell'uno e nell'altro caso il rapporto potrà sempre essere espresso per mezzo di una frazione continua ; che avrà per denominatori i quozienti delle successive divisioni eseguite per la ricerca della massima comune misura (n° 206). Se le grandezze sono commensurabili fra loro, la frazione continua potrà ridursi a frazione ordinaria, e quindi il rapporto delle due grandezze proposte sarà espresso da quello di due numeri interi (n° 199) ; e se le grandezze sono incommensurabili , la frazione continua non avendo termine , non vi sarà alcuna frazione ordinaria che possa esprimerla esattamente , ma essa potrà essere rappresentata da una infinità di frazioni ordinarie , le quali secondo che si prenderà un numero maggiore di termini della frazione continua, si approssimeranno di più in più al suo vero valore , sino a differirne per una quantità minore di qualunque data.

DELLA PROPORZIONE

209. *Definizione I.* La *proporzione* è l' uguaglianza di due ragioni.

Così essendo 2 il rapporto di 20 a 10, come pure di 12 a 6, i numeri 20, 10, 12 e 6 formeranno una proporzione , che s' indica in questo modo, 20 : 10 : : 12 : 6, e si enuncia dicendo 20 *sta a* 10 *come* 12 *sta a* 6.

In generale se quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione , si scriverà per indicarla

$$A : B : : C : D.$$

210. Dunque in una proporzione esistono quattro termini , cioè due *antecedenti* A e C, e due *conseguenti* B e D. I termini A, e D diconsi *termini estremi*; B e C sono i *termini medii*. L' ultimo termine D considerato separatamente chiamasi *quarto proporzionale*.

211. *Definizione II.* La proporzione si dice *continua* , allorchè i due termini medii sono uguali , tale sarebbe 8 : 4 : : 4 : 2 , ed in generale

$$A : B : : B : C.$$

E poichè la proporzione continua consiste propriamente in tre termini è addivenuto che si scrive anche in questo modo

$$\div A : B : C.$$

Da ciò è derivato che il secondo termine chiamasi *medio proporzionale* , perchè fa da conseguente nella prima ragione , e da antecedente nella seconda ; e che l' ultimo termine C si dica *terzo proporzionale*.

212 Volendo ogni ragione esser rappresentata da una frazione

ne segue che la proporzione corrisponde all'uguaglianza di due frazioni. E poichè la ragione di due quantità è un numero astratto, la proporzione consisterà sempre nell'uguaglianza di due numeri astratti. Quindi abbenchè i termini di una medesima ragione sieno necessariamente *omogenei*, pure non è necessario che lo sieno tutti quattro i termini di una proporzione, ma i termini della prima ragione potranno essere *eterogenei* con quelli della seconda; in guisa che i termini della prima ragione possono essere, per esempio, due linee, e quelli della seconda due superficie, o due solidi.

213. Da quanto precede apparisce chiaramente che l' ordine di grandezza de' termini della prima ragione dovrà essere lo stesso di quello dei termini della seconda ragione; e però se in una proporzione il primo termine è maggiore, minore, o uguale al secondo, ancora il terzo sarà maggiore, minore, o uguale al quarto.

Si deduce ancora che se in una proporzione i conseguenti sono eguali, saranno pure uguali gli antecedenti; e reciprocamente se sono eguali gli antecedenti, saranno ancora eguali i conseguenti.

214. *Definizione* III. Se quattro grandezze A, B, C, D formano una proporzione secondo l'ordine con cui sono nominate, cioè sia

$$A : B :: C : D,$$

Si dirà che la ragione di $A : B$ è *diretta* della ragione di $C : D$, o pure che le grandezze A e B sono *proporzionali* alle grandezze C e D. Ma se

$$A : B :: D : C,$$

in tal caso si dirà che la ragione di $A : B$ è *inversa*, o *reciproca* della ragione di $C : D$, o pure che le grandezze A e B sono *inversamente*, o *reciprocamente proporzionali* alle grandezze C e D.

215. Per esempio, se fossero dati i numeri 7, 14, 12, 6, non si potrebbe formare con essi una proporzione disponendoli nell'ordine con cui sono nominati, perchè la ragione 7 : 14 non è uguale alla ragione 12 : 6, ma alla *ragione inversa*, o *reciproca* di 12 : 6, vale a dire a quella di 6 : 12. Quindi si dice che i numeri 7, e 14 sono reciprocamente proporzionali ai numeri 12, e 6, stante che volendo stabilire fra essi la proporzione convien fare una inversione ne' termini della seconda ragione, cioè mettere il conseguente in luogo dell antecedente, e questo in luogo di quello,

216. Ogni ragione potendo rappresentarsi per mezzo di una frazione, è chiaro che se una ragione 7 : 14 è maggiore di un'altra 7 : 15, l'inversa della prima 14 : 7 sarà minore della inversa della seconda 15 : 7, e viceversa.

PROPOSIZIONE LII — TEOREMA.

217. *Se quattro grandezze commensurabili* A, B, C, D *sono proporzionali, cioè* A : B :: C : D, *il prodotto de' termini estremi sarà eguale a quello de' termini medii.*

Dim. Infatti, essendo per ipotesi la ragione $A : B$ eguale alla ra-

gione $C:D$, le frazioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ saranno ancora eguali fra loro (n° 192). Ma quando due frazioni eguali si riducono allo stesso denominatore, i numeratori delle nuove frazioni sono eguali; dunque se si riducono le due frazioni accennate allo stesso denominatore, i numeratori $A \times D$, e $B \times C$, che ne risultano, saranno eguali fra loro; e però il prodotto de'termini estremi sarà eguale a quello de'medii. Il che bisognava dimostrare.

218. *Corollario* I. Quando la proporzione è continua, vale a dire si ha

$$A : B :: B : C$$

Si dimostra come sopra che il prodotto $A \times C$ de'termini estremi è uguale al prodotto $B \times B$ de'termini medii. Ma siccome si è chiamato *quadrato* il prodotto di due fattori eguali, così si dice che

In ogni proporzione continua il prodotto de'termini estremi è uguale al quadrato del termine medio.

In luogo di $B \times B$ si scrive per brevità B^2, che si pronunzia dicendo *B due*, o pure *B quadrato*. La cifra 2 serve ad indicare il numero de' fattori uguali.

219. *Corollario* II. Essendo dati due numeri, per esempio 8 e 2, sarà facile trovare fra essi il medio proporzionale x; poichè il quadrato di x sarà eguale al prodotto 8×2, ossia 16; e per conseguenza x sarà eguale alla radice quadrata di 16, ossia 4. In generale se R, e r sono due numeri dati, il medio proporzionale x fra questi numeri sarà

$$x = \sqrt{R \times r}.$$

220. *Scolio* I. La reciproca della proposizione precedente è manifesta, vale a dire

Se quattro grandezze commensurabili A, B, C, D *sono tali che il prodotto* $A \times D$ *delle due estreme è uguale al prodotto* $B \times C$ *delle due medie, esse grandezze saranno proporzionali, cioè si avrà*

$$A : B :: C : D.$$

221. *Scolio* II. Quindi si vede che se il prodotto di due grandezze è uguale a quello di due altre, si potrà passare dalla eguaglianza alla proporzione con disporre le quattro grandezze per modo che i fattori di un prodotto figurino da termini estremi, ed i fattori dell'altro prodotto da termini medii della proporzione. Sicchè si dovrà scrivere prima uno de'fattori del primo prodotto, poi ambidue i fattori del secondo, e finalmente il rimanente fattore del primo prodotto.

222. *Scolio* III. Da siffatta disposizione si rende manifesto che la ragione de' fattori A, C non è uguale alla ragione de'fattori D, B, ma alla ragione inversa di questi. Inoltre abbenchè la ragione $A : D$ de'fattori del primo prodotto non sia eguale nè alla ragione diretta, nè alla inversa $B : C$ de'fattori del secondo prodotto, pure per comodità si dice che

Quando il prodotto di due grandezze eguaglia il prodotto di due

altre, i fattori del primo prodotto sono reciprocamente proporzionali ai fattori del secondo.

PROPOSIZIONE LIII — TEOREMA.

* 223. *Se quattro grandezze incommensurabili* A, B, C, D *sono proporzionali, cioè* A : B :: C : D, *il prodotto de' termini estremi sarà eguale al prodotto de' termini medii.*

Dim. Imperocchè, i rapporti incommensurabili $A : B$, e $C : D$, possono esser espressi ciascuno da una frazione continua che non ha termine (n° 208), e siccome essi rapporti si suppongono eguali, così devono essere anche uguali, anzi identiche, le frazioni continue corrispondenti. Da ciascuna di tali frazioni si potrà poi formare una serie di frazioni ordinarie, ossia di rapporti fra numeri interi, i quali da principio differiranno di una quantità finita dai rapporti dati $A : B$, e $C : D$, ma poi andranno sempre più avvicinandosi a tali rapporti sino a differirne di una quantità minore di qualunque assegnabile. Inoltre, in virtù della eguaglianza delle frazioni continue, saranno eguali fra loro quelle frazioni ordinarie, o rapporti in numeri interi, che si ottengono da un egual numero di termini delle medesime frazioni continue.

Ciò premesso, supponiamo, per fissare le idee, che il rapporto $\frac{A}{B}$ sia espresso dalla frazione continua di cui si è parlato più sopra (n° 206), cioè

$$\text{sia } \frac{A}{B} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{ecc.}}}$$

Prendendo i primi quattro termini di questa frazione possiamo mettere la frazione ordinaria $\frac{41}{29}$ in luogo di $\frac{A}{B}$. Se dunque si divida B in 29 parti eguali, e si chiami m una di queste parti, A dovrà contenere 41 di queste medesime parti con un resto minore di m. Se poi si prendano cinque termini della frazione continua accennata, si potrà in luogo di $\frac{A}{B}$ mettere la frazione ordinaria $\frac{99}{70}$, e quindi dividendo B in 70 parti eguali, e chiamando n una di queste parti, A dovrà contenere 99 di queste medesime parti con un resto minore di n. Or siccome si possono prendere della frazione continua quanti termini si vogliono, così è manifesto che in luogo di $\frac{A}{B}$ si può mettere una frazione $\frac{A'}{B}$, nella quale A' differisce da A di una quantità minore di qualunque assegnabile. Parimente in luogo di $\frac{C}{D}$ si potrà mettere una frazione $\frac{C'}{D}$, in cui C' differisce da C di

una quantità minore di qualunque assegnabile. Ora essendo eguali i rapporti $\frac{A'}{B}$, e $\frac{C'}{D}$, ossia essendo $A' : B :: C' : D$, ed essendo queste quantità commensurabili, sarà (n°217) $A' \times D = B \times C'$.

Ciò posto, se $A \times D$ non è uguale a $B \times C$, supponiamo che sia maggiore, e sia K la differenza. E poichè A' può differire da A di una quantità minore di qualunque assegnabile, ne segue che il prodotto $A' \times D$ può differiro dal prodotto $A \times D$ di una quantità minore di K, ed allora $A' \times D$ sarebbe maggiore di $B \times C$. Ma $A' \times D = B' \times C$, dunque ancora $B' \times C$ sarebbe maggiore di $B \times C$; il che non può sussistere, essendo B' minore di B; e per conseguenza non può essere $A \times D$ maggiore di $B \times C$. Nello stesso modo si dimostra che non può essere minore, dunque $A \times D = B \times C$. Il che bisognava dimostrare.

* 224. *Scolio I.* La moltiplicazione di un numero commensurabile per un numero incommensurabile è nel fatto ineseguibile, perchè un numero incommensurabile essendo un decimale a periodo infinito non si può paragonare all'unità, e però manca il modulo per valutarlo esattamente. Per esempio, la moltiplicazione effettiva di qualunque numero intero o fratto per $\sqrt{2}$ sarà sempre ineseguibile, perchè in luogo di questo numero incommensurabile non si può mettere che un valore più o meno approssimato al vero valore, il quale è un *limite*, di cui non si può avere l'espressione esatta in quantità finite. Lo stesso dovrà dirsi del prodotto di due numeri incommensurabili, eccetto alcuni casi particolari, ne' quali il prodotto si ottiene in quantità finite, come avviene, per esempio, quando si moltiplica $\sqrt{2}$ per $\sqrt{2}$, nel qual caso il prodotto è 2; e così pure allorchè si moltiplica $\sqrt{2}$ per $\sqrt{8}$, il prodotto è $\sqrt{16}$, ossia 4. Ma in generale la moltiplicazione di fatto de' numeri incommensurabili si riduce ad un' approssimazione, che potrà spingersi tanto quanto si voglia; e ciò basta nelle applicazioni, dappoichè *un'approssimazione indefinita, e ad arbitrio del calcolatore equivale all esattezza.*

* 225. *Scolio II.* Le considerazioni precedenti servono a far conoscere in che consiste il prodotto de'numeri incommensurabili; ma quello che merita maggior attenzione si è che nell'applicare la teorica delle ragioni e proporzioni alla geometria si ha bisogno soltanto di esser certi che in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è uguale al prodotto de'termini medii; poichè non vi è bisogno di fare la moltiplicazione effettiva de'termini accennati, bastando il solo teorema per dimostrare a rigore le verità geometriche. Quindi svaniscono tutte le difficoltà che potrebbero insorgere nell'applicazione della teorica mentovata alla geometria; difficoltà che a torto sono state dichiarate insuperabili da alcuni matematici. Resterà solamente oscuro il concetto stesso delle grandezze incommensurabili, ma questa oscurità è inerente alla natura del soggetto, nè vi è modo di evitarla, perchè, come già si è visto, nel passaggio del

commensurabile all'Incommensurabile s'incontra sempre l'idea dell'infinito, la quale essendo idea negativa sarà sempre oscura.

PROPOSIZIONE LIV — TEOREMA.

226. *Se quattro grandezze sono proporzionali, permutando saranno ancora proporzionali.*

Dim. Sieno proporzionali le quattro grandezze A, B, C, D, in guisa che abbiasi $A : B :: C : D$. Dico che permutando saranno ancora proporzionali, cioè si avrà $A : C :: B : D$.

Infatti essendo per ipotesi $A : B :: C : D$, sarà (n° 217) $A \times D = B \times C$; ma il prodotto $B \times C$ è uguale al prodotto $C \times B$, dunque si avrà $A \times D = C \times B$; e passando da questa uguaglianza alla proporzione (n° 221) ne risulterà.

$$A : C :: B : D.$$

Il che bisognava di dimostrare.

227. *Scolio.* Il *permutando* consiste adunque nel paragonare in una proporzione gli antecedenti fra loro, ed i conseguenti fra loro.

228. *Corollario.* La proporzione $A : B :: C : D$ non si altera, se si moltiplicano, o si dividono per un medesimo numero i due antecedenti, o i due conseguenti. Infatti permutando si avrà $A : C :: B : D$; ma la ragione $A : C$ non cangia di valore, allorchè si moltiplicano, o si dividono per lo stesso numero n i suoi termini, dunque sarà $nA : nC :: B : D$, e $\frac{A}{n} : \frac{C}{n} :: B : D$, e permutando di nuovo in queste due proporzioni, apparirà chiara la proposizione enunciata.

PROPOSIZIONE LV — TEOREMA.

229. *Se quattro grandezze sono proporzionali, invertendo saranno ancora proporzionali.*

Dim. Sieno proporzionali le quattro grandezze A, B, C, D, in guisa che abbiasi $A : B :: C : D$. Dico che invertendo saranno ancora proporzionali, cioè si avrà $B : A :: D : C$.

Imperocchè essendo per ipotesi $A : B :: C : D$, sarà (n° 217) $A \times D = B \times C$, o che vale lo stesso $B \times C = A \times D$; e però passando da questa uguaglianza alla proporzione si avrà

$$B : A :: D : C.$$

Il che si doveva dimostrare.

230. *Scolio I.* Da questa proposizione apparisce che l' *invertendo* si riduce a mettere in una proporzione i conseguenti in luogo degli antecedenti, e reciprocamente.

231. *Scolio II.* In generale si potranno fare nell' ordine de' termini d' una proporzione tutt' i cambiamenti, che si vorranno, purchè il prodotto degli estremi rimanga uguale a quello de' medii.

PROPOSIZIONE LVI. — *TEOREMA.*

232. *Se quattro grandezze sono proporzionali, in guisa che abbiasi* A: B :: C: D, *sarà* componendo A + B: B :: C + D: D, e dividendo A — B: B :: C — D: D.

Dim. Si suppone che gli antecedenti A e C sieno maggiori dei conseguenti B e D; poichè se fosse altrimenti si farebbe prima l'invertendo, e si considererebbero come antecedenti i termini B e D. Ciò premesso.

1°. Essendo la ragione di A a B espressa dalla frazione $\frac{A}{B}$, e la ragione di C a D dalla frazione $\frac{C}{D}$, se si aggiunga ad ambedue l'unità, sarà $\frac{A}{B}+1$ uguale a $\frac{C}{D}+1$. Or è evidente che $\frac{A}{B}+1$ equivale ad $\frac{A}{B}+\frac{B}{B}$, poichè ogni grandezza divisa per se stesa deve dare l'unità: parimente $\frac{C}{D}+1$ equivale a $\frac{C}{D}$ $\frac{D}{D}$: se dunque si faccia la somma delle due prime frazioni, e quella delle due seconde, sarà $\frac{A+B}{B}$ uguale a $\frac{C+D}{D}$, vale a dire che la ragione di $A+B$ a B è uguale alla ragione di $C+D$ a D, onde si avrà

$$A+B:B::C+D:D.$$

2°. Se in vece di aggiungere si sottraggà l'unità dalle due frazioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$; indi in luogo della somma si faccia la sottrazione delle frazioni che ne risultano, si avrà $\frac{A-B}{B}$ uguale a $\frac{C-D}{D}$, vale a dire sarà

$$A-B:B::C-D:D.$$

Il che bisognava dimostrare.

233. *Scolio.* È facile vedere che il *componendo* riducesi a paragonare la somma dell'antecedente e del conseguente allo stesso conseguente. Potrebbe ancora il *componendo* consistere nel paragonare la somma dell'antecedente e del conseguente allo stesso antecedente.

Il *dividendo* poi si riduce a paragonare l'eccesso dell'antecedente sul conseguente allo stesso conseguente. Si potrebbe ancora paragonare l'antecedente all'eccesso dello stesso antecedente sul conseguente, che gli antichi chiamavano *convertendo*, ma questa denominazione non è più adoperata dai matematici moderni.

PROPOSIZIONE LVII — *TEOREMA.*

234. *Se due proporzioni hanno gli stessi antecedenti, i conseguenti saranno fra loro respettivamente proporzionali.*

Dim. Sieno le due proporzioni $A: B :: C: D$, ed $A: E :: C: F$. Dico che sarà

$$B: D :: E: F,$$

Infatti le due proporzioni proposte danno permutando

$$A: C :: B: D. \text{ ed } A: C :: E: F;$$

per conseguenza la ragione di A a C è uguale tanto alla ragione di B a D quanto alla ragione di E a F: ma due ragioni uguali ad una terza sono uguali fra loro, dunque sarà

$B: D :: E. F$. Il che bisognava dimostrare.

235. *Corollario*. Se due proporzioni hanno gli stessi conseguenti, gli antecedenti saranno fra loro proporzionali; poichè invertendo i conseguenti divengono antecedenti e reciprocamente.

PROPOSIZIONE LVIII — *TEOREMA*.

236. *Se tre grandezze sono proporzionali a tre altre, e fra le prime la somma di due eguaglia la terza, lo stesso accaderà in corrispondenza fra le seconde.*

Dim. Siano le tre grandezze A, B, C proporzionali alle tre altre a, b, c, dimodochè si abbia

$$A : B : C :: a : b: c,$$

ossia $A : B :: a : b$, $B : C :: b : c$, $A : C :: a : c$; dico che se $A + B = C$, sarà pure $a + b = c$.

Infatti, dalla proporzione $A : B :: a : b$, componendo ed invertendo si ottiene $A : A+B :: a : a+b$. Ma questa proporzione ha gli stessi antecedenti dell'altra $A : C :: a : c$, dunque i conseguenti saranno in proporzione, cioè sarà $A+B : a+b :: C : c$. Or in questa proporzione essendo per ipotesi gli antecedenti eguali, dovranno esserlo ancora i conseguenti, e quindi si avrà $a+b = c$. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LIX — *TEOREMA*.

237. *In ogni proporzione la somma, o la differenza degli antecedenti sta alla somma, o alla differenza de' conseguenti come uno degli antecedenti al suo conseguente.*

Dim. Sia la proporzione $A: B :: C: D$, sarà permutando $A: C :: B: D$. Or se a quest' ultima proporzione si applichi il il componendo, ed il dividendo si avrà

$A + C: C :: B + D: D$, ed $A - C : C :: B - D: D$, e permutando si otterrà in fine $A + C: B + D :: C : D$, ed $A - C: B - D :: C : D$. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LX — *TEOREMA*.

238. *Se si ha una serie di rapporti uguali la somma di tutti gli*

antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come uno degli antecedenti al suo conseguente.

Dim. Sia $A : B :: C : D :: E : F :: G : H$, ecc. Considerando solamente i due primi rapporti, si avrà la proporzione

$$A : B :: C : D,$$

dalla quale (n° 237) si deduce

$$A + C : B + D :: A : B.$$

E poichè il terzo rapporto $E : F$ è uguale al primo $A : B$, si avrà

$$A + C : B + D :: E : F.$$

Or se in questa proporzione si faccia la somma degli antecedenti e quella de' conseguenti, ne risulterà

$A + C + E : B + D + F :: E : F$, o $:: A : B$, e così in progresso. Il che bisognava dimostrare.

Della ragione composta.

239. Una ragione si dice *composta* di due o più ragioni, quando ha per antecedente il prodotto degli antecedenti di quelle ragioni, e per conseguente il prodotto de' conseguenti delle ragioni medesime. Così, essendo date le ragioni di $a : b$, di $c : d$, e di $e : f$, la ragione composta di queste tre ragioni sarà $a \times c \times e : b \times d \times f$. (*).

240. La ragione composta di due ragioni uguali dicesi *duplicata*: si dirà poi *triplicata* se è composta di tre ragioni uguali, ecc...

PROPOSIZIONE LXI — *TEOREMA.*

241. *Se i termini di una proporzione si moltiplicano per i ter-*

(*) Consistendo il valore di una ragione nel quoziente che si otterrebbe dividendo l'antecedente pel conseguente, si è dato a quel quoziente il nome di *esponente*, oppure di *quantità della ragione*. Quindi è avvenuto che alcuni matematici considerando le ragioni componenti relativamente ai loro esponenti hanno definita la ragione composta nel modo seguente:

Una ragione si dice esser composta di due o più ragioni, quando la quantità di quelle è il prodotto delle quantità di queste moltiplicate fra loro.

Ma è facile vedere che questa definizione è una conseguenza immediata della prima; dappoichè moltiplicando fra loro gli antecedenti delle ragioni componenti, ed i conseguenti delle stesse ragioni anche fra loro, si vengono a moltiplicare fra loro le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, che sono appunto gli esponenti o le quantità delle ragioni accennate. Gli antichi adoperavano la seconda definizione, perchè non si permettevano di riguardare come numeri i termini di una ragione; ma abbiam visto a suo luogo che questi termini si possono, anzi si devono considerare come numeri, se si vogliono conoscere le quantità geometriche come sono effettivamente senza orpello o mistero.

Laonde con Boscovich, ed altri grandi geometri faremo uso della prima definizione in ciò che concerne la ragione composta.

mini corrispondenti di un'altra, i quattro prodotti, che ne risulta-no, formeranno una nuova proporzione.

Dim. Sieno le due proporzioni

$$A : B :: C : D, \text{ ed } E : F :: G : H.$$

È manifesto che moltiplicando fra loro i termini corrispondenti di queste proporzioni, cioè A. per E, B per F, C per G, e D per H, nasceranno due ragioni composte di ugual numero di ragioni uguali; e per conseguenza sarà

$$A \times E : B \times F :: C \times G : D \times H.$$

Il che bisognava dimostrare.

242. *Scolio.* È evidente che il teorema avrebbe luogo anche quando le proporzioni date fossero più di due.

PROPOSIZIONE LXII — TEOREMA.

243. *Se quattro quantità formano una proporzione, i loro quadrati o i loro cubi formeranno ancora una proporzione.*

Dim. Sia la proporzione

$$A : B :: C : D.$$

Se i termini di questa proporzione si moltiplicano per i termini corrispondenti di una o di due proporzioni identiche alla proporzione data, i prodotti, che risulteranno, saranno proporzionali, in virtù del teorema precedente. Or essendosi chiamato *quadrato* il prodotto di due fattori uguali, e *cubo* quello di tre fattori uguali, ne segue che i termini della proporzione così formata saranno i quadrati o i cubi dei corrispondenti termini della proporzione $A : B :: C : D$.

Il che bisognava dimostrare.

244. *Scolio.* Sia data, per esempio, la proporzione $2 : 3 :: 4 : 6$.
Elevando a quadrato si avrà

$$4 : 9 :: 16 : 36.$$

Elevando poi a cubo si avrà.

$$8 : 27 :: 64 : 216.$$

PROPOSIZIONE LXIII — TEOREMA.

245. *Reciprocamente, se quattro quantità formano una proporzione, le loro radici quadrate o cubiche formeranno ancora una proporzione.*

Dim. Sia la proporzione

$$2 : 3 :: 4 : 6.$$

La radice quadrata di un numero moltiplicata per se stessa dovrà evidentemente riprodurre il numero accennato. Quindi invece della proporzione data si può scrivere

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} : \sqrt{3} \times \sqrt{3} :: \sqrt{4} \times \sqrt{4} : \sqrt{6} \times \sqrt{6};$$

ma questa proporzione può considerarsi come prodotta dalla moltiplicazione dei termini della proporzione

$$\sqrt{2}:\sqrt{3}::\sqrt{4}:\sqrt{6}$$

per i termini corrispondenti di una proporzione identica, dunque se quattro quantità sono proprorzionali, le loro radici quadrate sono ancora in proporzione. Osservando in fine che la radice cubica di un numero moltiplicata due volte per se stessa deve riprodurre il numero accennato, si vedrà che il teorema ha anche luogo per le radici cubiche. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXIV — *TEOREMA*.

246. *Se sono date tre quantità omogenee A, B, C, la ragione della prima alla terza sarà composta delle ragioni della prima alla seconda, e della seconda alla terza.*

Dim. Perocchè essendo la ragione di A a B espressa dalla frazione $\frac{A}{B}$, e la ragione di B a C dalla frazione $\frac{B}{C}$, ne consegue che la ragione composta di quelle due ragioni sarà espressa dal prodotto di quelle due frazioni $\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}$. Ma questo prodotto è uguale alla frazione $\frac{A}{C}$, poichè si può togliere il fattore B comune al numeratore, ed al denominatore, senza alterare il prodotto accennato; e da un'altra parte $\frac{A}{C}$ esprime la ragione di A a C, dunque la ragione di A a C si compone della ragione di A a B, e della ragione di B a C. Il che bisognava dimostrare.

247. *Scolio.* È manifesto che se le quantità omogenee sono quattro, la ragione della prima all' ultima sarà composta della ragione della prima alla seconda, della seconda alla terza, e della terza alla quarta.

PROPOSIZIONE LXV — *TEOREMA*.

248. *In ogni proporzione continua il primo termine sta al terzo come il quadrato del primo al quadrato del secondo, o come il quadrato del secondo al quadrato del terzo.*

Dim. Imperocchè se A, B, C sono le tre quantità continuamente proporzionali, sarà la ragione di A a C composta della ragione di A a B, e della ragione di B a C (n°246). Ma per la supposta proporzione queste due ragioni sono uguali fra loro, dunque la ragione di A a C sarà composta della ragione di A a B, e della stessa ragione di A; B; e per conseguenza sarà espressa da $A\times A$: $B\times B$. ovvero sarà A a C come il quadrato di A al quadrato di B. Nello stesso modo si dimostra che A sta a C come il quadrato di B al quadrato di C. Il che bisognava dimostrare.

249. *Scolio.* Questo importante teorema si enuncia **ancora** dicendo: *nella proporzione continua il primo termine sta al terzo in ragion duplicata del primo al secondo, o del secondo al terzo.*

In fatti la ragione del primo termine A al terzo C si compone delle due ragioni uguali A: B, e B: C; e per conseguenza (n.° 240) sarà duplicata di una di loro.

CAPITOLO IX.

DELLA MISURA DELLE AJE DE' POLIGONI, E DE' RAPPORTI CHE NE DERIVANO.

250. *Definizione I. Misurare* una grandezza significa trovare il numero delle volte, che essa contiene una grandezza della medesima specie, la quale per convenzione si prende per *unità di misura.*

251. Un tal numero di unità convenute è la *misura* della grandezza; e paragonando poi la grandezza misurata a quella che la misura, il detto numero, *considerato astrattamente*, esprime la ragione che passa tra quelle due grandezze.

252. Per esempio (fig. 46). supponiamo che si sia presa la linea CD della lunghezza di un piede parigino; e supponiamo inoltre che CD sia contenuta esattamente 30 volte in AB, in tal caso si dirà che la misura di AB è 30 piedi parigini. Con questa frase abbreviata si vuol intendere che la linea AB sta alla linea CD come il numero astratto 30 sta all'unità.

253. Talvolta l'unità di misura non è contenuta esattamente nella grandezza che si vuol misurare, ma vi è bensì contenuta esattamente una parte aliquota di essa unità; allora la misura della grandezza accennata sarà espressa da un numero frazionario. Così supponendo come sopra che CD sia l'unità di misura, e che la sua decima parte sia contenuta 25 volte in AB, la misura di questa grandezza verrà espressa da $\frac{25}{10}$ di CD; e ciò significa che

$$AB : CD :: 25 : 10.$$

254. Dalle cose precedenti apparisce chiaramente che l'unica maniera di misurare una grandezza qualunque è quella di considerare come cognita e fissa un'altra grandezza della medesima specie, e di determinare il rapporto di quella a questa.

255. L'*aja*, o la superficie d'un poligono sono vocaboli quasi sinonimi. Nondimeno l'aja dinota più particolarmente la quantità superficiale di una figura, in quanto che è misurata o paragonata ad altra superficie.

256. *Definizione* II. Si chiamano *figure equivalenti* quelle che hanno aje uguali. Due figure di forme differentissime possono essere equivalenti: così un cerchio può essere equivalente ad un quadrato, un triangolo ad un parallelogrammo, ad un pentagono, ecc.

La denominazione di *figure uguali* vien limitata a quelle che sovrapposte l'una all'altra coincidono in tutti i loro punti. Tali sono

due cerchi di raggi uguali, due triangoli che hanno i lati rispettivamente uguali, ecc.

257. *Definizione* III. S'intende per *altezza* d'un parallelogrammo la perpendicolare che misura la distanza di due lati opposti. Questi lati diconsi *basi* del parallelogrammo.

258. *Definizione* IV, L'*altezza* d'un triangolo è la perpendicolare abbassata dal vertice d' un angolo sul lato opposto, il quale lato prende il nome di *base* del triangolo.

259. *Definizione* V. L'*altezza* d' un trapezio è la perpendicolare che misura la distanza de'suoi due lati paralleli; questi lati si dicono *basi* del trapezio.

260. Misurare l' aja di una figura significa, come più sopra si è detto, paragonarla ad un' altra aja presa per unità.

Il quadrato, che ha per lato l'unità di lunghezza, è stato scelto per *unità di superficie*, o di aja. Se, per esempio, l' unità di lunghezza è il palmo, l'unità di aja è quella di un quadrato che ha per lato un palmo, e che si chiama *palmo quadrato*. Se l' unità di lunghezza è la canna, l'unità di aja è quella del quadrato che ha per lato una canna, e che dicesi *canna quadrata*, e così in progresso.

261. Se dunque si suppone (fig. 48.) che q sia un quadrato, di cui il lato x sia l'unità di lunghezza, misurare l' aja del rettangolo $ACHE$ significa cercare quante volte la sua superficie, o la sua aja contiene quella del quadrato q. Si potrebbe credere che per arrivare a misurare l'aja del rettangolo per mezzo di quella del quadrato unità convenga soprapporre il quadrato al rettangolo, e vedere quante volte vi è contenuto. Nella proposizione seguente vedremo che si può far a meno di ricorrere a questa operazione, la quale non potrebbe praticarsi generalmente parlando.

PROPOSIZIONE LXVI — *TEOREMA*.

262. *L'aja di un rettangolo qualunque* ACHE *ha per misura il prodotto della sua base* CH *per l'altezza* CA (fig. 48).

Dim. Rappresenti x il lato del quadrato stabilito per unità delle superficie (n° 260). Possono darsi tre casi; 1° quando i lati AC, CH del proposto rettangolo sono ambedue commensurabili col lato x del quadrato unità, 2° quando un lato è commensurabile e l'altro no, 3° quando nessuno de'due lati è commensurabile con x.

1°. Se i lati AC, CH del rettangolo sono commensurabili coll'unità di lunghezza x, supponiamo che questa retta unità adattata successivamente su i lati AC, CH sia contenuta due volte in CH e quattro in AC esattamente. Rimane così divisa la retta AC in quattro parti uguali ne'punti F, D, B, e la CH in due parti nel punto N; ed ognuna di tali parti uguaglierà l'unità lineare x. Per i punti di divisione B, D, F si tirino le rette BP, DK, FG parallele a CH, e pel punto N si conduca NM parallela ad AC. Con questa costruzione il proposto rettangolo $ACHE$ risulterà evidentemente diviso in

piccoli quadrati tutti uguali fra loro ed uguale ciascuno al quadrato unità. Il numero de'quadrati sarà 8, e potrà supporsi composto, o di due serie *CM*, *NE* ognuna di quattro quadrati, o di quattro serie *BH*, *DP*, *FK*, *AG* ciascuna di due quadrati; onde è chiaro che quel numero sarà il prodotto di 2 per 4; cioè il prodotto del numero delle unità lineari contenute in *CH* pel numero delle unità lineari contenute in *AC*. Ma il numero 8 esprime quanti quadrati unità sono contenuti nel proposto rettangolo, ed è perciò la misura di esso rettangolo (n° 250): dunque ***il rettangolo ACHE ha per misura il prodotto de'suoi lati*** AC, CH. (*).

2°. Se la base *CH* del rettangolo è commensurabile con l'unità lineare x e l'altezza *AC* incommensurabile, dico che la misura del rettangolo sarà anche $CH \times AC$. Infatti, se è possibile, il rettangolo abbia per misura il prodotto di *CH* per un'altezza minore o maggiore di *AC*, per esempio *CO*. Si prenda dell' unità lineare x una tal parte aliquota *CR*, che sia minore di *AO*, e si porti successivamente su i lati *CH*, *CA* del rettangolo a partire dal punto *C*; essa sarà contenuta un numero esatto di volte in *CH*, e dovrà segnare sul lato *AC* un punto di divisione *L* compreso fra *A* ed *O*. Conducendo pel punto *L* la retta *LD* parallela a *CH*, il rettangolo *LCHD* che ne risulta, avrà i suoi lati commensurabili con l'unità lineare, e perciò che si è dimostrato qui sopra sarà misurato dal prodotto di *CH* per *CL*: ma questo prodotto è evidentemente maggiore di quello di *CH* per *CO*, che si è supposto la misura del rettangolo dato, dunque il rettangolo *LCHD* sarà maggiore del rettangolo *ACHE*, il che è assurdo. Similmente si dimostrerebbe che il rettangolo proposto non può avere per misura il prodotto di *CH* per un'altezza maggiore di *AC*, e quindi, anche in questo secondo caso, il proposto rettangolo ha per misura il prodotto de'suoi lati *AC*, *CH*.

(*) Potrebbe accadere che l'unità lineare x, quantunque commensurabile co' lati *AC*, *CH* del proposto rettangolo, non fosse contenuta esattamente in ciascuno di essi. Allora le tre rette x, *AC*, *CH* dovranno avere una *comune misura* che non sarà x, ma un'*aliquota* di x (n° 185). Supponiamo per fissare le idee, che la terza parte di x sia misura comune delle rette *AC*, *CH*, e riportata successivamente sopra ognuna di esse sia contenuta due volte in *CH*, e quattro in *AC*. Ragionando come qui sopra si conchiuderà che il proposto rettangolo rimane diviso in 8 quadrati, ciascuno de'quali ha per lato la terza parte dell'unità lineare; ed anche in questa ipotesi il rettangolo avrà per misura il prodotto de' suoi lati. Imperciocchè supponendo fatto il quadrato sull' unità lineare x, diviso ogni suo lato in tre parti uguali, ed uniti i punti di divisione, il quadrato unità sarà evidentemente composto di nove quadrati, ciascuno de'quali ha per lato la tersa parte dell' unità lineare; e però ognuno di questi piccoli quadrati sarà la *nona* parte del quadrato unità. Ma il proposto rettangolo conteneva 8 di questi quadrati; dunque esso avrà per misura $\frac{8}{9}$ del quadrato unità. Da un'altra parte il numero 8 è sempre il prodotto del numero delle parti uguali contenute nel lato *CH* pel numero delle parti contenute nel lato *AC*, se non che in questo caso ognuna di quelle parti è $\frac{1}{3}$ dell' unità lineare, onde il prodotto de'due lati espressi in parti dell'unità lineare corrisponde a quello delle frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$, cioè ad $\frac{8}{9}$, quale è appunto la misura del rettangolo proposto.

3° Siano finalmente ambedue i lati CH, CA incommensurabili con l'unità lineare x, se è possibile, in questa terza ipotesi il rettangolo $ACHE$ abbia per misura il prodotto della base CH per un'altezza CO minore di AC. Si prenda un'aliquota di x minore di AO, e si porti ripetutamente sopra AC partendo dal punto C. Un punto di divisione dovrà cadere in L fra A ed O, e compito il rettangolo $LCHD$, esso avrà un lato LC commensurabile con l'unità lineare, e l'altro CH incommensurabile. La sua misura, pel secondo caso, sarà $CH \times CL$, il quale prodotto essendo maggiore di $CH \times CO$ ne risulterà come qui sopra l'assurdo che il rettangolo $CHDL$ parte di $ACHE$ sarebbe maggiore del tutto.

Dunque in ogni caso, *un rettangolo qualunque ha per misura il prodotto della sua base per l'altezza*. Il che bisognava dimostrare.

263. *Corollario*. Quando il rettangolo proposto è un quadrato la base e l'altezza sono uguali; onde per ottenere il numero delle unità di superficie contenute in questo quadrato, basta moltiplicare per se stesso il numero delle unità lineari che contiene uno de'suoi lati. Se, per esempio, il lato di questo quadrato contiene 2 unità lineari, la sua superficie conterrà 2×2, ovvero 4 unità di superficie. In generale se A rappresenta un lato del quadrato, la sua aja sarà espressa da $A \times A$, ovvero A^2: ed ecco perchè in aritmetica si è chiamato *quadrato* il prodotto di un numero per se stesso.

* 264. *Scolio*. Abbenchè una linea comunque moltiplicata non possa mai divenire superficie, e che perciò siffatta generazione della superficie per mezzo delle linee sia ben diversa dalla moltiplicazione, si accordano non pertanto in questo, cioè che il numero delle unità contenute in una linea moltiplicato pel numero delle unità contenute in un'altra produce un *numero astratto di unità* corrispondente alla superficie compresa da queste linee, se per unità di superficie si prenda il quadrato di cui i lati sono le unità lineari. (*)

Dunque, siasi qualunque la linea presa per unità di misura lineare, purchè si prenda per unità di superficie il quadrato fatto sopra la linea medesima, il numero delle unità lineari contenute nella base di un rettangolo moltiplicato pel numero delle unità lineari contenute nell'altezza esprime non già una retta, ma bensì *un numero astratto* commensurabile, o incommensurabile, che dinota il rapporto dell'aja del rettangolo a quella del quadrato unità, vale a dire (n° 250) rappresenta la misura del rettangolo medesimo (**).

(*) Newton. *Arit. Univ.* p. 4.

(**) Si potrebbe domandare cosa esprime il prodotto de' due lati CH, AC (fig. 48) del rettangulo nel 2.° e nel 3.° caso considerati qui sopra, quando uno o ambedue quelli lati non possono assegnarsi esattamente in parti dell'unità lineare, e quindi in numeri? Una tale circostanza indica che il rettangolo non può esprimersi esattamente nè in numeri interi, nè in numeri frazionarii per mezzo dell'unità superficiale, cioè che il rettangolo è incommensurabile con quella unità, e la sua misura è un numero incommensurabile o irrazionale. Solamente nel 3° caso potrebbe accadere che il prodotto delle linee CH, ed AC dasse un numero commensurabile, come altrove (n° 224) ab-

PROPOSIZIONE LXVII — *TEOREMA*.

265. ***Due rettangoli qualunque stanno fra loro in ragion composta della ragione delle basi e della ragione delle altezze*** (fig. 49).

Dim. Siano $ABCD$, ed $EFGH$ due rettangoli, di cui AB ed EF sono le basi, AD ed EH le altezze.

In virtù del teorema precedente il rettangolo $ABCD$ ha per misura $AB \times AD$. Parimente il rettangolo $EFGH$ ha per misura $EF \times EH$; per conseguenza i due rettangoli stanno fra loro come i prodotti delle basi moltiplicate per le altezze. Or essendo $AB : EF$ la ragione delle basi, ed $AD : EH$ quella delle altezze, ne segue che la ragione composta di queste due ragioni sarà (n° 239).

$AB \times AD : EF \times EH$; e per conseguenza i due rettangoli stanno fra loro in ragion composta della ragione delle basi e della ragione delle altezze. Il che bisognava dimostrare.

266. *Corollario.* I. Se le altezze AD, EH sono uguali fra loro, la ragione composta $AB \times AD : EF \times EH$, togliendo il fattore comune all' antecedente e al conseguente, si ridurrà a quella delle basi $AB : EF$. Quindi si deduce che

Due rettangoli della stessa altezza stanno fra loro come le basi.

267. *Corollario.* II. Se i rettangoli $ABCD$, ed $EFGH$ fossero equivalenti, allora si avrà

$$AB \times AD = EF \times EH;$$

e passando da questa uguaglianza alla proporzione (n° 221) risulterà

$$AB : EF :: EH : AD, \text{ cioè}$$

Se due rettangoli sono equivalenti, le loro basi stanno in ragion reciproca delle altezze.

La proposizione inversa è manifesta, vale a dire

---

biamo osservato. Ma quando il prodotto delle linee accennate risulta incommensurabile, allora è chiaro che valutando i lati del rettangolo per mezzo di aliquote dell' unità lineare sempre più piccole, si avrà una serie di rettangoli commensurabili con l'unità quadrata, che andranno avvicinandosi di più in più al rettangolo proposto sino a differire per una quantità minore di qualunque data. Il rettangolo proposto sarà dunque un *limite*, al quale gli accennati rettangoli razionali potranno avvicinarsi quanto si vorrà senza però raggiungerlo. Tutto ciò è conforme alla natura delle quantità incommensurabili (n.° 224); nondimeno giova di non perdere di vista quello che ivi si è osservato, vale a dire che nella geometria non si ha bisogno di fare il prodotto effettivo delle linee CH, ed AC, ma solamente di conoscere che quando si prende il quadrato per unità di superficie, l'aja del rettangolo sta a quella di questo quadrato come il numero astratto, qualunque esso siasi, che risulta dal prodotto sopraccennato sta all'unità astratta; e perciò il prodotto di due linee rappresenta il rettangolo contenuto da queste linee. Il prodotto effettivo ha luogo nelle applicazioni della geometria, ed abbiam visto più sopra in qual modo si deve intendere.

Se le basi di due rettangoli sono reciprocamente proporzionali alle altezze, i due rettangoli sono equivalenti.

Infatti, in tal caso si avrà

$$AB : EF :: EH : AD.$$

e per conseguenza sarà $AB \times AD = EF \times EH$, ovvero sarà il rettangolo $ABCD$ equivalente al rettangolo $EFGH$.

268. *Scolio.* Se il rettangolo $EFGH$ si prendesse per unità di misura del rettangolo $ABCD$; il rapporto de' prodotti $AB \times AD$, ed $EF \times EH$ rappresenterebbe il rapporto del rettangolo $ABCD$ alla sua unità di misura, e per conseguenza rappresenterebbe la misura del rettangolo medesimo.

Per esempio, supponiamo $AB = 10, AD = 6$, $EF = 3$, ed $EH = 4$, $ABCD : EFGH :: 10 \times 6 : 4 \times 3 :: 60 : 12 :: \frac{60}{12} : 1$. Quindi l'aja del rettangolo $ABCD$ sarà $\frac{60}{12}$ dell' aja del rettangolo $EFGH$, ovvero sarà il quintuplo dell' aja di questo rettangolo.

PROPOSIZIONE LXVIII — *TEOREMA.*

269. ***L'aja d'un parallelogrammo ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza*** (fig. 50).

Dim, Sia il parallelogrammo $ABCD$. Dico che la sua aja ha per misura il prodotto della base DC per l'altezza CF.

Dal punto D si conduca a CF la parallela DE che incontrerà il prolungamento di BA nel punto E: la figura $EDCF$ sarà un rettangolo equivalente al parallelogrammo $ABCD$. Infatti, ne' triangoli EAD, FCB il lato $ED = CF$ come lati opposti del rettangolo $EDCF$, il lato $AD = BC$ come lati opposti del parallelogrammo $ABCD$, e l'angolo $EDA = FCB$, perchè hanno i lati paralleli e rivolti dalla stessa parte (n° 79). Si aggiunga di comune il quadrilatero $ADCF$, e risulterà il parallelogrammo $ABCD$ equivalente al rettangolo $EDCF$, che ha la stessa base DC, e la stessa altezza CF; e però il parallelogrammo $ABCD$ avrà per misura il prodotto della base per l'altezza. Il che bisognava dimostrare.

270. *Corollario I.* Apparisce da questo teorema che

Due parallelogrammi sono equivalenti quando hanno la stessa base, e la stessa altezza.

271. *Corollario II.* ***Due parallelogrammi*** *qualunque sono in ragion composta della ragione delle basi e della ragione delle altezze.*

Ciò si ricava dalla proposizione LXVII, come pure i corollarii qui appresso.

272. *Corollario III. Due parallelogrammi che hanno la stessa altezza stanno fra loro come le basi.*

273. *Corollario IV. Due parallelogrammi equivalenti hanno le basi in ragion reciproca delle altezze.*

274. *Corollario V. Se le basi di due parallelogrammi sono in ragion reciproca delle altezze, i due parallelogrammi saranno equivalenti.*

PROPOSIZIONE LXIX — *TEOREMA*.

275. *L'aja d'un triangolo ha per misura il prodotto della sua base per la metà della sua altezza* (fig. 51).

Dim. Sia il triangolo *ABC*. Dico che la sua aja ha per misura il prodotto della sua base *BC* per la metà della sua altezza *AD*.

Dal punto *A* si conduca *AE* parallela a *BC*, e dal punto *C* si tiri la retta *CE* parallela ad *AB*. La figura *ABCE* sarà un parallelogrammo, il quale è diviso dalla diagonale *AC* in due parti uguali (n° 164). Ma il parallelogrammo *ABCE* ha per misura il prodotto della base *BC* per l'altezza *AD*, dunque il triangolo *ABC*, che è metà del parallelogrammo, avrà per misura il prodotto della base *BC* per la metà dell'altezza *AD*. Il che bisognava dimostrare.

276. *Corollario I*. Si deduce da questo teorema che

Ogni triangolo è metà del parallelogrammo che ha la stessa base e la stessa altezza.

Quindi divengono manifesti i corollarii seguenti.

277. *Corollario II. Due triangoli della stessa base e delle stessa altezza sono equivalenti*.

278. *Corollario III. Due triangoli qualunque sono in ragion composta della ragione delle basi e della ragione delle altezze*.

279. *Corollario IV. Due triangoli che hanno la stessa altezza stanno fra loro come le basi*.

280. *Corollario V. Due triangoli equivalenti hanno le basi in ragion reciproca delle altezze*.

281. *Corollario VI. Se due triangoli hanno le basi in ragion reciproca delle altezze, saranno equivalenti*.

PROPOSIZIONE LXX — *TEOREMA*.

282. *Due triangoli, che hanno un angolo uguale ad un angolo, stanno fra loro in ragion composta delle ragioni de' lati che comprendono gli angoli eguali*, ovvero *stanno come i rettangoli de' medesimi lati* (fig. 52).

Dim. Siano i due triangoli *ABC*, e *DAE*, che abbiano l'angolo *BAC*=*DAE*. Dico che il triangolo *ABC* sta al triangolo *ADE* in ragion composta di *AB* : *AE*, e di *CA* : *AD*, ovvero come il rettangolo di *AB* in *AC* sta al rettangolo di *AD* in *AE*.

Si pongano i due triangoli in modo che i lati *BA*, *AE* stiano in linea retta, gli altri due *CA*, *AD* staranno pure in linea retta (n° 65); indi si congiunga il punto *B* col punto *D*.

I triangoli *ABC*, *ABD*, *ADE* essendo tre grandezze omogenee, sarà la prima *ABC*, alla terza *ADE* in ragion composta della prima alla seconda. e della seconda alla terza (n° 246). Ma i triangoli *ABC*, *ABD* avendo la stessa altezza, perchè il vertice *B* è comune, e le basi *CA* , *AD* sono situate in una medesima linea retta *CD*, stanno fra loro come le basi accennate(n° 279); ed allo stesso mo-

do il triangolo BAD sta al triangolo ADE come la base BA alla base AE: dunque il triangolo ABC sta al triangolo ADE in ragion composta della ragione di CA: AD e della ragione di BA: AE, ovvero sarà il triangolo ABC al triangolo ADE come $AB \times AC$: $AD \times AE$, ossia come il rettangolo di AB in AC al rettangolo di AD in AE. Il che bisognava dimostrare.

283. *Corollario I.* È manifesto che i due triangoli sarebbero equivalenti se il rettangolo $AB \times AC$ fosse equivalente al rettangolo $AD \times AE$, o che vale lo stesso se si avesse la proporzione

$$AB : AD :: AE : AC.$$

Da ciò si deduce che

Se due triangoli hanno un angolo uguale ad un angolo, ed i lati intorno agli angoli uguali sono reciprocamente proporzionali, essi triangoli saranno equivalenti; e viceversa.

284. *Corollario* II. Essendo ogni parallelogrammo diviso dalla sua diagonale in due triangoli eguali (n° 164), la ragione di due parallelogrammi sarà eguale a quella de' triangoli; e per conseguenza

Due parallelogrammi equiangoli stanno fra loro in ragion composta delle ragioni de' lati che comprendono gli angoli eguali, ovvero ***come i rettangoli de' medesimi lati***; ***e viceversa.***

PROPOSIZIONE LXXI — *TEOREMA.*

* 285. ***Se l' angolo*** EBD ***è supplemento dell' angolo*** ABC, ***ed i lati intorno a tali angoli sono reciprocamente proporzionali, il triangolo*** DBE ***sarà equivalente al triangolo*** ABC (fig. 53).

Dim Perocchè, essendo per ipotesi $AB : BE :: BD : BC$, posta $BF = BD$, e congiunta FE, sarà pure $AB : BE :: BF : BC$; e però in virtù della proposizione precedente (*Cor.* I. n.° 283) il triangolo ABC sarà equivalente al triangolo FEB. Ma il triangolo EBD è equivalente al triangolo FEB perchè hanno uguali basi BD, BF, e la stessa altezza, essendo il vertice E comune e le basi accennate in una medesima linea retta; dunque il triangolo EBD è equivalente al triangolo ABC. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXII — *TEOREMA.*

286. ***L'aja d'un trapezio ha per misura il prodotto della sua altezza per la metà della somma delle basi parallele*** (fig. 54).

Dim. Sia $ABCD$ un trapezio, in cui i lati paralleli o le basi sono AB e CD, e l'altezza DH.

Si divida il lato CB in due parti uguali nel punto O e per questo punto si conduca la retta FE parallela al lato AD; indi si prolunghi DC finchè incontri la parallela medesima nel punto E. Se si

paragonano i due triangoli OCE, ed OBF si avrà il lato $CO=OB$, per costruzione, l'angolo $COE=BOF$ come verticali, e l'angolo $OCE=OBF$ come alterni rispetto alle parallele AB, DE, segate dalla terza CB: dunque questi due triangoli hanno un lato uguale ad un lato, e gli angoli adiacenti a questi lati respettivamente uguali; perciò saranno uguali. Or se da tutta la figura $ADEOB$ si toglie alternativamente ciascuno di questi triangoli, rimarrà da una parte il trapezio $ABCD$, e dall'altra il parallelogrammo $ADEF$, che sarà perciò equivalente al trapezio proposto. Ma l'aja del parallelogrammo $ADEF$ ha per misura il prodotto della sua altezza DM per la sua base AF; dunque il trapezio $ABCD$ ha per misura lo stesso prodotto, cioè $DM \times AF$.

Ciò premesso, si vede che AB è uguale ad AF con l'aggiunta di FB: al contrario DC è uguale a DE meno CE. Ma $FB=CE$, ed $AF=DE$, dunque le due basi AB, DC del trapezio prese insieme sono uguali alle due basi AF, DE del parallelogrammo, e per conseguenza la base AF del parallelogrammo è uguale alla *semi-somma*, ossia alla metà della somma delle due basi del trapezio. Quindi il trapezio ha per misura il prodotto della sua altezza DM per la semi-somma de'lati paralleli. Il che bisognava dimostrare.

287. *Scolio*. Se pel punto O si conduca OH parallela alle due basi del trapezio, il punto H in cui questa retta incontra il lato AD sarà il punto di mezzo di questo lato. Infatti, nel parallelogrammo $DEOH$ si ha il lato $DH = OE$ (n. 164) ; per la stessa ragione $HA=OF$; ma $OE=OF$, perchè sono uguali i triangoli OCE, OBF, dunque sarà pure $DH=HA$. Di più è la retta $OH = AF$ come lati opposti del parallelogrammo $AHOF$; perciò si conchiude che

L'aja d'un trapezio ha per misura il prodotto della sua altezza per la retta che unisce i punti di mezzo de'lati non paralleli.

PROPOSIZIONE LXXIII — *PROBLEMA.*

288. *Ad un dato triangolo* ABC *fare un parallelogrammo equivalente* FECG *con un angolo uguale ad un angolo dato* (fig. 55).

Soluzione. Dal punto A condotta la retta AG parallela alla base BC, e questa divisa per mezzo nel punto E, si faccia l'angolo CEF eguale all'angolo dato, indi si tiri CG parallela ad EF, il parallelogrammo $FECG$ sarà equivalente al triangolo dato ABC. Infatti, hanno la stessa altezza, perchè sono compresi fra le stesse parallele, e la base BC del triangolo è doppia della base EC del parallelogrammo ; perciò le loro aje devono essere eguali. Il che bisognava fare.

289. *Scolio*. La risoluzione del problema inverso è manifesta.

PROPOSIZIONE LXXIV — *PROBLEMA.*

290. *Trasformare un poligono in un triangolo equivalente* (fig. 56).

Sol. Sia *ABCDE* il poligono dato: si conduca la diagonale *CE*; ed a questa la parallela *DF*, che incontri il lato *AE* prolungato in *F*: indi si tiri la retta *CF*. I due triangoli *ECD*, *CEF* sono equivalenti, perchè hanno la medesima base *CE*, e la medesima altezza, essendo racchiusi fra le stesse parallele *CE*, *DF*. Se dunque al triangolo *ECD* si sostituisce il triangolo *CEF*, il poligono *ABCDE* verrà tasformato nel poligono equivalente *ABCF*, che ha un lato di meno. Applicando a questo poligono la costruzione precedente si avrà un triangolo equivalente al poligono proposto. È manifesto che la stessa costruzione condurrà a trasformare un poligono di un numero qualunque di lati in un triangolo equivalente. Il che bisognava fare.

291. *Scolio.* Si vede ora non solo la possibilità di misurare l'aja d'un poligono di qualsivoglia numero di lati, ma ancora quella di paragonare fra loro le aje di due poligoni qualunque.

CAPITOLO X.

DELLA PROPORZIONALITA' DE' LATI DE' TRIANGOLI. TEORICA DELLE FIGURE SIMILI.

292. Dopo la perfetta eguaglianza o di sovrapposizione, la più feconda di applicazioni è la equivalenza ossia l'eguaglianza in grandezza indipendentemente dalla forma, di cui abbiam parlato nel capitolo precedente, e che nasce quando da due superficie eguali si sottrae una medesima superficie in siti differenti. Ma oltre a queste due specie di eguaglianza ve ne ha un'altra assai importante la quale consiste nella eguaglianza degli angoli e de' rapporti delle linee, che costituiscono i poligoni. Di questa andiamo ora a trattare.

PROPOSIZIONE LXXV — *TEOREMA.*

293. *Se in un triangolo si conduca una retta parallela ad un lato, gli altri due lati saranno divisi in parti proporzionali* (fig. 57).

Dim. Nel triangolo *ABC* si conduca la retta *DE* parallela a *BC*. Dico che si avrà

$$AD : DB :: AE : EC.$$

Si congiunga il punto *B* col punto *E*, ed il punto *C* col punto *D*. I due triangoli *BDE*, e *CED* sono equivalenti, perchè hanno la stessa base *DE*, e la stessa altezza, essendo compresi fra le medesime parallele *BC*, e *DE*; per conseguenza il triangolo *ADE* avrà la stessa ragione ai due triangoli *BDE*, e *CED* (n° 196), vale a dire sarà

$$ADE : BDE :: ADE : CED.$$

Or i triangoli *ADE*, *BDE* hanno la stessa altezza, perchè hanno il vertice *E* comune, e le basi *AD*, *DB* sono situate in una medesima linea retta *AB*, dunque i detti triangoli stanno fra loro come

basi accennate (n° 279). Parimente si dimostra che il triangolo ADE sta al triangolo CED come la base AE alla base EC; e per conseguenza sostituendo alle ragioni de' triangoli quelle delle basi si avrà

$$AD : DB :: AE : EC.$$

Il che bisognava dimostrare.

294. *Corollario*. Da questa proporzione si deduce *componendo* (n° 232) che

1°. $AD + DB : AD :: AE + EC : AE$, ossia $AB : AD :: AC : AE$;

2°. $AD + DB : DB :: AE + EC : EC$, ovvero

$$AB : DB :: AC : EC.$$

PROPOSIZIONE LXXVI — *TEOREMA*.

295. *Se i lati* AB, AC *d'un triangolo* ABC, *sono divisi in parti proporzionali da una retta* DE, *questa sarà parallela al terzo lato* BC (fig. 57).

Dim. I triangoli ADE, BDE avendo la stessa altezza stanno fra loro come le basi AD, DB. Parimente il triangolo ADE sta al triangolo CED come la base AE alla base EC. Ma per ipotesi si ha

$$AD : DB : : AE : EC,$$

dunque il triangolo ADE sta al triangolo BDE come lo stesso triangolo ADE al triangolo CED; e però sarà il triangolo BDE equivalente al triangolo CED. Or questi due triangoli hanno la stessa base DE, dunque devono avere la stessa altezza; ossia devono essere compresi fra le stesse parallele DE, BC. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXVII — *TEOREMA*.

296. *Se tra due rette* CB, EG *si conducano quante parallele si vogliano* CE, DF, BG, *quelle rette saranno divise in parti proporzionali* (fig. 58).

Dim. Se le due rette date CB, EG sono parallele, la proposizione enunciata è evidente, poichè in tal caso le parti CD, DB sono respettivamente uguali alle parti EF, FG, come lati opposti de' parallelogrammi $CDFE$, $DBGF$. Se poi non sono parallele, si prolunghino finchè s'incontrino nel punto A.

Nel triangolo ADF essendo CE parallela a DF, sarà la ragione di AD ad AF uguale a quella di CD ad EF (n° 294). Similmente nel triangolo ABG essendo DF parallela a BG sarà la ragione di AD ad AF uguale a quella di DB a FG Ma due ragioni uguali a una terza sono uguali fra loro, dunque si avrà

$$CD : EF :: DB : FG,$$

ovvero permutando

$$CD : DB :: EF : FG.$$

Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXVIII — *TEOREMA.*

297. *La retta* BD *che divide in due parti uguali l' angolo* CBA *di un triangolo, dividerà il lato opposto* AC *in due segmenti proporzionali ai lati adiacenti* (fig. 59).

Dim. Pel punto C si conduca la retta CE parallela a BD, e si prolunghi il lato AB che incontrerà CE nel punto E; perchè non si possono tirare dal punto B due parallele a CE.
Considerando le due parallele rispetto alla secante AE sarà l'angolo esterno ABD uguale all' interno ed opposto dalla stessa parte BEC (n° 75) ; rispetto poi alla secante BC gli angoli alterni CBD. BCE saranno uguali fra loro (n° 75). Ma per ipotesi l'angolo ABD è uguale all angolo CBD, dunque ancora l'angolo BEC sarà uguale all' angolo BCE; e perciò sarà il lato $BE = BC$ (n° 112). Or nel triangolo ACE la retta BD essendo parallela a CE si ha la proporzione

$$AD : DC :: AB : BE.$$

Quindi mettendo BC in luogo di BE si avrà in fine

$$AD : DC :: AB : BC.$$

Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXIX — *TEOREMA.*

298. *Se nel triangolo* ABC *si conduca la retta* DE *parallela al lato* BC, *il triangolo* ADE *sarà equiangolo al triangolo* ABC, *e saranno proporzionali i lati adiacenti agli angoli uguali* (fig. 60).

Dim. Dal punto D si tiri DF parallela ad AC. Essendo DE parallela a BC, sarà l' angolo esterno ADE uguale all' interno ed opposto dalla stessa parte ABC. Parimente si dimostra che l' angolo AED è uguale all' angolo ACB, dunque il triangolo ADE è equiangolo al triangolo ABC.
In secondo luogo, essendo DF parallela ad AC, i lati BA, BC saranno divisi in parti proporzionali (n° 293), e si avrà $BA:DA::BC:FC$. Ma FC è uguale a DE, perchè sono lati opposti del parallelogrammo $DECF$, dunque sarà $BA : DA :: BC : DE$. Or in virtù delle parallele DE, BC, ancora i lati BA, e CA sono divisi in parti proporzionali, vale a dire che si ha $BA : DA :: CA : EA$, dunque la ragione di BA a DA è uguale tanto alla ragione di BC a DE, quanto alla ragione di CA ad EA ; e per conseguenza si avrà

$$BA : DA :: BC : DE :: CA : EA.$$

Quindi il triangolo ABC è equiangolo al triangolo ADE, ed i lati adiacenti agli angoli uguali sono proporzionali. Il che bisognava dimostrare.

299. *Scolio I.* Ne' triangoli equiangoli i lati adiacenti agli angoli uguali sono stati chiamati *lati omologhi*, e quelli stessi angoli si so

no detti *angoli omologhi* (*). Così, il lato AB è omologo ad AD, il lato BC a DE, ed il lato AC ad AE.

300. *Scolio II.* Immaginiamo che il lato BC si muova parallelamente a se stesso verso il punto A, il triangolo ABC andrà impicciolendosi a misura che il lato BC più si avvicina al punto A, ma per ciò che più sopra si è dimostrato conserverà sempre la stessa forma e varierà nella sola grandezza. Or siccome nel linguaggio comune due oggetti si dicono *simili*, quando la forma è in ambedue la stessa, ma la grandezza è diversa, così volendosi serbare una certa analogia colla comune maniera di parlare si è fatta la seguente

Definizione. Due triangoli si dicono simili, quando hanno gli angoli uguali ciascuno a ciascuno, ed i lati omologhi proporzionali.

Quindi si deduce che se in un triangolo ABC si conduca una retta DE parallela ad un lato BC, il triangolo ADE sarà simile al triangolo ABC. Si deduce ancora che due triangoli uguali sono sempre simili, ma non *viceversa*, vale a dire che due triangoli simili possono essere assai disuguali.

PROPOSIZIONE LXXX — *TEOREMA.*

301. ***Se dal vertice di un triangolo* ABC *si conducano quante parallele si vogliano* AE, AG, *ecc. alla base* BC, *queste divideranno la base medesima e la sua parallela* DF *in parti proporzionali* (fig. 63).**

Dim. Perocchè, nel triangolo ABE essendosi condotta la parallela DL alla base BE sarà (n.° 298) $AE : AL :: BE : DL$. Per la stessa ragione nel triangolo AEG sarà $AE : AL :: EG : LO$; ma due ragioni eguali ad una terza sono eguali fra loro, dunque $BE : DL :: EG : LO$. Considerando i due triangoli AEG, AGC in vece dei due ABE, AEG, si dimostrerà nello stesso modo che $EG : LO :: GC : OF$, e però si avranno le ragioni eguali $BE : DL :: EG : LO :: GC : OF$. Il che bisognava dimostrare.

Caratteri della simiglianza de' triangoli.

PROPOSIZIONE LXXXI — *TEOREMA.*

302. ***Due triangoli sono simili, quando hanno gli angoli rispettivamente uguali* (fig. 61).**

Dim. Ne' triangoli ABC, FGH sia l' angolo $A = F$, $B = G$; $C = H$. Dico che i due triangoli saranno simili.

Sul lato AB supposto maggiore di FG si prenda $AD = FG$, e si tiri DE parallela a BC. Da questa costruzione risulta che l' angolo ADE è uguale all' angolo ABC (n° 75): ma per ipotesi l' angolo

(*) *Omologo* è parola greca, e significa *simile ragione*.

$ABC = FGH$, dunque sarà ancora l' angolo $ADE = FGH$; e per conseguenza il triangolo ADE sarà uguale al triangolo FGH, perchè hanno un lato uguale a un lato e gli angoli adiacenti a questi lati respettivamente uguali. Ma il triangolo ADE è simile al triangolo ABC (n° 299), dunque sarà ancora il triangolo FGH simile al triangolo ABC. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXXII — *TEOREMA.*

303. ***Due triangoli sono simili, quando hanno i lati respettivamente proporzionali*** (fig. 61).

Dim. Ne'triangoli ABC, FGH sia $AB : FG :: AC : FH :: BC : GH$. Dico che i due triangoli sono simili.

Si prenda sul lato AB una parte $AD = FG$, e si conduca DE parallela a BC. Si avrà (n° 294) la proporzione $AB : AD :: AC : AE$: ma per ipotesi si ha $AB : FG :: AC : FH$; dunque essendo in queste due proporzioni gli antecedenti uguali, si avrà (n° 234), $AD : FG :: AE : FH$. Ma per costruzione $AD = FG$; dunque dovrà essere ancora $AE = FH$ (n° 213). Parimente si dimostra che $DE = GH$, poichè da una parte (n° 298) si ha $AB : AD :: BC : DE$, e dall'altra si ha per ipotesi $AB : AD :: BC : GH$. Quindi i due triangoli ADE, FGH hanno i tre lati rispetitivamente uguali, e perciò sono uguali. Or il triangolo ADE è simile al triangolo ABC (n° 298), dunque sarà ancora il triangolo FGH simile al triangolo ABC. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXXIII — *TEOREMA.*

304. ***Due triangoli sono simili, quando hanno un angolo uguale a un angolo, e sono proporzionali i lati che comprendono gli angoli uguali*** (fig. 61).

Dim. Abbiano i due triangoli ABC, FGH l'angolo $A = F$, e sia inoltre $AB : FG :: AC : FH$. Dico che il triangolo ABC è simile al triangolo FGH.

Sul lato AB si prenda $AD = FG$, e si tiri DE parallela a BC. Si avrà (n° 294) la proporzione $AB : AD :: AC : AE$; ma per ipotesi $AB : FG :: AC : FH$, dunque essendo in queste due proporzioni gli antecedenti uguali sarà $AD : FG :: AE : FH$. Ma per costruzione $AD = FG$, dunque dovrà essere ancora $AE = FH$, e per conseguenza sarà il triangolo ADE uguale al triangolo FGH, poichè hanno due lati respettivamente uguali a due lati, e l'angolo compreso dai primi uguale all'angolo compreso dai secondi. Or il triangolo ADE è simile al triangolo ABC (n° 298), dunque ancora il triangolo FGH sarà simile al triangolo ABC. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXXIV — *TEOREMA.*

305. *Due triangoli sono simili, quando hanno i lati respettivamente paralleli* (fig. 61.)

Dim. Sieno i lati AB, AC, BC del triangolo ABC respettivamente paralleli ai lati FG, FH, GH del triangolo FGH. Dico che il triangolo FGH è simile al triangolo ABC.

Infatti gli angoli A, e F sono uguali perchè sono compresi fra lati paralleli e rivolti dalla stessa parte. Parimente si dimostra che l'angolo $C = H$, e l'angolo $B = G$, dunque i due triangoli ABC, FGH sono equiangoli e perciò simili. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXXV — *TEOREMA.*

306. *Due triangoli sono simili, quando hanno i lati rispettivamente perpendicolari* (fig. 62).

Dim. Ne' triangoli ABC, EDF sia il lato DE perpendicolare ad AB, il lato FD ad AC, ed il lato EF a BC. Dico che il triangolo ABC è simile al triangolo EDF

Infatti, nel quadrilatero $AIDH$ la somma dei quattro angoli equivale a quattro retti (n° 145): ma gli angoli DHA, e DIA sono retti per supposizione, dunque la somma de'due rimanenti HAI, ed HDI dovrà essere uguale a due retti. Or la somma degli angoli adiacenti HDI, FDI è pure uguale a due retti; perciò se si toglie il comune angolo HDI, resterà l'angolo FDE uguale all'angolo BAC. Nello stesso modo si dimostra che l'angolo $E = B$, e l'angolo $F = C$. Quindi i due triangoli ABC, EDF sono equiangoli; e per conseguenza sono simili. Il che bisognava dimostrare.

307. *Scolio I.* Nella dimostrazione precedente si è considerato il triangolo EDF come situato dentro del triangolo ABC; dappoichè se stasse fuori come il triangolo $E'D'F'$, di cui i lati prolungati si suppongono perpendicolari rispettivamente ai lati del triangolo ABC, in tal caso si descriverà dentro di questo triangolo il triangolo EDF, che abbia i lati rispettivamente paralleli a quelli del triangolo $E'D'F'$. È manifesto che in virtù delle parallele i lati del triangolo EDF saranno rispettivamente perpendicolari ai lati del triangolo ABC, e perciò il triangolo $E'D'F'$ sarà simile al triangolo ABC.

308. *Scolio. II.* Dalle cinque proposizioni precedenti si può concludere che due triangoli sono simili.

1°. *Quando hanno due angoli uguali ciascuno a ciascuno.*

2°. *Quando hanno i lati proporzionali.*

3°. *Quando hanno un angolo uguale ad un angolo, e sono proporzionali i lati che comprendono gli angoli uguali.*

4°. *Quando hanno i lati respettivamente paralleli.*

5°. *Quando hanno i lati respettivamente perpendicolari.*

309. *Scolio III.* Merita ancora di essere osservato che nei *triangoli simili* i lati omologhi sono sempre opposti agli angoli uguali.

Pare dunque che i lati omologhi avrebbero potuto definirsi dicendo esser quelli, che ne' triangoli equiangoli sono opposti agli angoli uguali. Ma questa definizione non avrebbe potuto applicarsi ai poligoni simili di qualunque numero di lati, poichè in questi poligoni i lati non sono opposti agli angoli, e nulladimeno si considerano ancora in queste figure i lati omologhi, cioè i lati adiacenti agli angoli uguali.

PROPOSIZIONE LXXXVI — *TEOREMA*.

310. ***I triangoli simili stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi*** (fig. 61).

Dim. Siano i due triangoli simili ABC, FGH: dico che stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi AB, FG, ovvero AC FH, o infine BC, GH.

Infatti, essendo simili i due triangoli sarà l'angolo $A = F$: ma quando due triangoli hanno un angolo eguale ad un angolo stanno fra loro in ragion composta delle ragioni de' lati che comprendono gli angoli eguali (n° 282), dunque sarà il triangolo ABC al triangolo FGH in ragion composta della ragione di AB: GF, e di AC: FH, ovvero (n° 240) in ragion duplicata di $AB : FG$, perchè in virtù della simiglianza de' triangoli la ragione di $AB : FG$ è uguale a quella di AC: FH. Ma la ragion duplicata di $AB : FG$ è la stessa che quella de' quadrati; per conseguenza sarà il triangolo ABC al triangolo FGH come il quadrato di AB al quadrato di FG. Il che bisognava dimostrare.

Proprietà del triangolo rettangolo.

PROPOSIZIONE LXXXVII — *TEOREMA*

311. ***Nel triangolo rettangolo* ABC, *se dal vertice* A *dell'angolo retto si abbassi la perpendicolare* AD, *sopra l ipotenusa, i triangoli* ADB, ADC *saranno simili fra loro, ed a tutto il triangolo* ABC** (fig. 64).

Dim. Infatti, i due triangoli ABD ed ABC sono rettangoli ambedue, ed hanno l' angolo B comune, dunque sara il terzo angolo BAD del primo uguale al terzo angolo C del secondo; e perciò il triangolo ABD è simile al triangolo ABC. Parimente i due triangoli ADC, ed ABC sono ambedue rettangoli, ed hanno l'angolo C comune, dunque sarà l' angolo DAC del primo uguale all'angolo B del secondo; e per conseguenza il triangolo ACD è simile al triangolo ABC. Quindi i due triangoli ABD, e ADC essendo equiangoli al triangolo ABC saranno simili fra loro, ed al triangolo ABC. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXXVIII — *TEOREMA*.

312. *Nel triangolo rettangolo* ABC *la perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo retto sopra l' ipotenusa è media proporzionale fra i due segmenti della medesima ipotenusa ; e ciascun cateto è medio proporzionale fra l' ipotenusa ed il segmento adiacente al cateto medesimo* (fig. 64).

Dim. I. Essendo simili i due triangoli ABD, ADC, i lati omologhi saranno proporzionali, ma questi sono opposti ai lati eguali (n°309) , dunque il lato BD che nel primo triangolo è opposto all'angolo BAD avrà per omologo il lato AD che nel secondo triangolo è opposto all' angolo $C = BAD$. Similmente si dimostra che il lato AD del primo triangolo ha per omologo il lato DC del secondo ; e per conseguenza si avrà la proporzione continua

$$BD : AD :: AD : DC,$$

ovvero che la perpendicolare AD è media proporzionale fra i due segmenti dell' ipotenusa.

II. Se ora si paragona ciascun triangolo parziale ABD, ADC al totale ABC,e si tenga presente come sopra che i lati omologhi sono opposti agli angoli eguali, si avranno le due proporzioni continue

$BC : AB :: AB : BD$, e $BC : AC :: AC : DC$, vale a dire che ciascun cateto è medio proporzionale fra l' ipotenusa ed il segmento adiacente al cateto medesimo. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXXIX — *TEOREMA*.

313. *Nel triangolo rettangolo* BAC *i quadrati de' cateti stanno come i segmenti adiacenti dell' ipotenusa, ed il quadrato dell' ipotenusa sta al quadrato di un cateto come l' ipotenusa al segmento adiacente al cateto medesimo* (fig. 64).

Dim. I. Essendo il cateto AB medio proporzionale fra l' ipotenusa BC, ed il segmento BD (n.°312), sarà il quadrato di AB eguale al rettangolo di BC in BD. Similmente si dimostra che il quadrato di AC è uguale al rettangolo di BC in DC, dunque i due quadrati stanno come i due rettangoli, i quali avendo la stessa base BC stanno come le altezze BD, DC (n.° 266); e per conseguenza sarà

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC.$$

II.In secondo luogo essendo $BC : AB :: AB : BD$, sarà (n°248) BC a BD come il quadrato di BC al quadrato di AB ;

e così pure essendo $BC : AC :: AC : DC$, sarà BC a DC come il quadrato di BC al quadrato di AC. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XC — *TEOREMA*.

314. *Nel triangolo rettangolo* BAC *il quadrato di un cateto sta*

al quadrato della perpendicolare AD *come l' ipotenusa al segmento adiacente all' altro cateto* (fig. 64).

Dim. Infatti, il quadrato di AB è eguale al rettangolo di BC in BD, ed il quadrato di AD al rettangolo di BD in DC (n.° 312) ; e perciò i due quadrati stanno come i due rettangoli. Ma questi stanno fra loro come le basi BC, DC, perchè hanno la stessa altezza BD, dunque

$$\overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 : : BC : DC.$$

Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XCI — *TEOREMA.*

315. *Il quadrato fatto su la ipotenusa di un triangolo rettangolo* BAC *è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra i cateti* (fig. 64).

Dim. Infatti, abbassando dal vertice A dell' angolo retto la perpendicolare AD sull' ipotenusa, risulteranno i tre triangoli rettangoli ABC, ABD, ADC, i quali essendo simili stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi, ovvero come i quadrati de' lati BC, AB, AC, che sono le ipotenuse de' triangoli accennati. Ma il triangolo ABC è uguale alla somma dei due triangoli ABD, ADC, dunque (n.° 256), ancora il quadrato di BC sarà eguale alla somma dei due quadrati di AB, e di AC. Il che bisognava dimostrare.

Altra dimostrazione.

Sopra i lati BC, AB, AC (fig. 65) del triangolo rettangolo ABC si descrivano i quadrati BE, BG, CH; indi dal punto A si abbassi la perpendicolare AM sul lato LE, e finalmente si tirino le diagonali AL, FC.

I due triangoli ABL, FBC sono uguali, perchè $AB = BF$ come lati di un medesimo quadrato, $BL = BC$ per la stessa ragione, e e l'angolo ABL formato dall'angolo retto CBL e dall'acuto ABC è uguale all'angolo FBC formato dall'angolo retto FBA e dallo stesso angolo acuto ABC. Ma il triangolo ABL è metà del rettangolo BM, perchè hanno la stessa base BL, e la stessa altezza BD, essendo compresi fra le stesse parallele BL, ed AM; e parimente il triangolo FBC è metà del quadrato BG, perchè hanno la stessa base BF, e la stessa altezza BA, essendo compresi fra le stesse parallele BF, e CG, dunque sarà il rettangolo BM equivalente al quadrato BG. Similmente si dimostra che il rettangolo MC è equivalente al quadrato CH; e per conseguenza il quadrato BE fatto sull' ipotenusa BC sarà uguale alla somma de' quadrati fatti sopra i cateti. Il che bisognava dimostrare (*).

(*) Pitagora fu primo a dimostrare questa proposizione, la quale perciò è

De' poligoni simili.

316. Applicando ai poligoni in generale la nozione della similitudine de' triangoli risulta la seguente

Definizione. Due poligoni si dicono simili, quando hanno gli angoli uguali ciascuno a ciascuno, ed i lati omologhi proporzionali.

317. Ne' triangoli simili l'uguaglianza degli angoli è una conseguenza della proporzionalità de' lati, e viceversa, per cui una di queste condizioni è sufficiente a stabilire la similitudine de' triangoli. Un tale legame cessa di esistere ne' poligoni simili d'un maggior numero di lati, dappoicchè in queste figure si può alterare la proporzionalità de' lati senza cangiare gli angoli, o pure si possono alterare gli angoli senza mutare i lati. Per esempio, se nel quadrilatero $ABCD$ (fig. 39) si tiri una retta EF parallela al lato BC, l'angolo AEF sarà uguale all'angolo B e l'angolo DFE all'angolo C; per conseguenza il quadrilatero $ADFE$ sarà equiangolo al quadrilatero $ABCD$, ma la proporzione de' lati è differente. Similmente senza alterare i quattro lati AB, BC, CD, DA si possono alterare gli angoli, con avvicinare o allontanare il punto B dal punto D ed il punto A dal punto C. Da queste considerazioni risulta che per dimostrare la similitudine di due poligioni si deve provare che hanno gli angoli uguali ciascuno a ciascuno, ed i lati omologhi proporzionali.

PROPOSIZIONE XCII — TEOREMA.

318. *Due poligoni simili possono dividersi nello stesso numero di triangoli simili rispettivamente, e similmente situati* (fig. 66.)

Dim. Sieno i due poligoni simili $ABCDE$, $FGHLO$. Dai vertici A, F di due angoli omologhi si conducano le diagonali AC, AD, FH, FL.

Per la simiglianza de' poligoni è l'angolo $B = G$, ed i lati AB, BC sono proporzionali ai lati FG, GH: per conseguenza (n° 304) il triangolo ABC è simile al triangolo FGH, onde sarà l'angolo BCA uguale all'angolo GHF Parimente l'angolo BCD è uguale all'angolo GHL; se dunque si tolga dal primo l'angolo BCA e dal secondo il suo eguale GHF, resterà l'angolo ACD, uguale all'angolo FHL. Or essendo simili i triangoli ABC, FGH la ragione di BC a GH è uguale alla ragione di AC a FH: ma per la simiglianza de' poligoni la ragione di BC a GH è uguale a quella di CD ad HL, dunque sarà la ragione di AC a FH uguale a quella di CD a LH; e per consegnenza i triangoli ACD, FHL sono simili. Nello stesso modo si dimostrerà che il triangolo ADE è simile al triangolo FLO, e così

---

conosciuta col nome di *teorema pittagorico*. La prima dimostrazione riportata nel testo è generale, perchè, come vedremo in appresso, si applica a tutt' i poligoni simili descritti sopra i tre lati del triangolo rettangolo, ed anche ai cerchi che avessero per diametri i medesimi lati.

in progresso se vi fossero altri triangoli. Dunque i poligoni simili si possono decomporre nello stesso numero di triangoli simili rispettivamente e similmente disposti. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XCIII — *TEOREMA*.

319. *Due poligoni sono simili, allorchè sono divisi nello stesso numero di triangoli simili rispettivamente, e similmente situati* (fig. 66).

Dim. Sieno i due poligoni $ABCDE$, $FGHLO$, ne'quali si suppone il triangolo ABC simile al triangolo FGH, il triangolo ACD simile al triangolo FHL, ed il triangolo ADE simile al triangolo FLO. Dico che i due poligoni sono simili.

Essendo per ipotesi il triangolo ABC simile al triangolo FGH, sarà l'angolo $B = G$, e l'angolo BCA uguale all'angolo GHF. Parimente essendo il triangolo ACD simile al triangolo FHL, sarà l'angolo ACD uguale all'angolo FHL. Quindi tutto l'angolo BCD sarà uguale a tutto l'angolo GHL; e così pure si dimostrerà che l'angolo $D = L$, l'angolo $E = O$, e l'angolo $A = F$. Dunque i due poligoni sono equiangoli; rimane a dimostrare che i lati omologhi sono proporzionali.

Or essendo simili i triangoli ABC, FGH, si ha $BC : GH :: AC : FH$. Ma per la simiglianza de'triangoli ACD, FHL si ha $AC : FH : CD : HL$, dunque la ragione di AC a FH è uguale tanto alla ragione di BC a GH, quanto a quella di CD ad HL; e per conseguenza si avrà $BC : GH :: CD : HL$. Nello stesso modo si dimostra che i rimanenti lati omologhi sono proporzionali, dunque i poligoni proposti sono simili. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XCIV — *TEOREMA*.

320. *I poligoni simili stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi* (fig. 66).

Dim. Sieno i due poligoni simili $ABCDE$, $FGHLO$. Dai vertici A, F di due angoli omologhi si conducano le diagonali AC, AD, FH, FL.

I due triangoli ABC, FGH essendo simili (n° 318) stanno fra loro come il quadrato di AC al quadrato di FH (n° 310). Per la stessa ragione il triangolo ACD sta al triangolo FHL come lo stesso quadrato di AC al quadrato di FH; per conseguenza sarà il triangolo ABC al triangolo FGH come il triangolo ACD al triangolo FHL. Nello stesso modo si dimostra che il triangolo ACD sta al triangolo FHL come il triangolo ADE al triangolo FLO.

Ma quando si hanno più ragioni uguali la somma degl'antecedenti sta a quella de' conseguenti come un antecedente qualunque al suo conseguente (n° 238), dunque la somma de'triangoli ABC,

ACD, ADE, cioè il poligono $ABCDE$, sta alla somma de' triangoli FGH, FHL, FLO, cioè al poligono $FGHLO$, come il triangolo ABC al triangolo FGH, ovvero come il quadrato di AB al quadrato di FG. Il che bisognava dimostrare.

321. *Corollario.* Apparisce da questa proposizione, e da quella dimostrata (n.° 315) che

La figura descritta sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABC (fig. 64) *è uguale alla somma delle figure simili e similmente descritte sopra i cateti.*

PROPOSIZIONE XCV — *TEOREMA.*

322. *I perimetri de' poligoni simili stanno fra loro come i lati omologhi* (fig. 66).

Dim. Siano i due poligoni simili $ABCDE$, $FGHLO$. Dico che i loro perimetri stanno come i lati omologhi AB, FG, ovvero BC, GH, ecc. Infatti, in virtù della loro similitudine si ha

$$AB : FG : : BC : GH : : CD : HL, \text{ecc.} \ldots ;$$

e per conseguenza (n.° 238) la somma di tutti gli antecedenti AB, BC, CD, ec., ossia il perimetro della prima figura, sta alla somma di tutt' i conseguenti FG, GH, HL, ecc., ovvero, al perimetro della seconda figura, come uno degli antecedenti AB al suo conseguente FG. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XCVI — *TEOREMA.*

323. *I poligoni regolari d' un medesimo numero di lati sono simili* (fig. 66).

Dim. Siano i due poligoni regolari $ABCDE$, $FGHLO$ d' un medesimo numero di lati: dico che sono simili. Infatti, siccome il valore di un angolo di questi poligoni dipende dal numero de' lati (n.° 146), che è lo stesso in ambidue, gli angoli di detti poligoni saranno eguali. Ma da un' altra parte i lati sono proporzionali, perchè uguali in ciascun poligono; dunque i poligoni proposti sono equiangoli ed hanno i lati omologhi proporzionali, perciò sono simili. Il che bisognava dimostrare.

324. *Corollario.* Si deduce da questa proposizione che

I perimetri de' poligoni regolari d' un medesimo numero di lati stanno come i loro lati, e le loro aje come i quadrati degli stessi lati.

CAPITOLO XI.

DEI QUADRATI E DEI RETTANGOLI FORMATI SULLE LINEE RETTE.

325. Partendo dalla misura del rettangolo, e dai teoremi intorno ai rapporti delle superficie, che abbiamo ricavati come conseguenze

immediate di quella misura, si potrebbero dimostrare senza figure i teoremi relativi ai quadrati ed ai rettangoli delle linee variamente divise. Ma siccome converrebbe ricorrere alle regole della moltiplicazione algebrica, così per non uscire dalla pura geometria esporremo i teoremi accennati con figure e costruzioni geometriche.

Dei quadrati e dei rettangoli delle linee variamente divise.

PROPOSIZIONE XCVII— *TEOREMA*.

326 *Se una retta* AC *è la somma delle linee* AB, BC, *il quadrato di* AC *è uguale al quadrato di* AB, *più il quadrato di* BC, *più il doppio del rettangolo compreso, fra* AB *e* BC (fig. 67).

Dim. Si costruisca sopra AC il quadrato $ACDE$; si prenda $AF = AB$, indi si conduca FG parallela ad AC e BH parallela ad AE.
Con questa costruzione il quadrato $ACDE$ resta diviso in quattro parti. La prima $ABIF$ è il quadrato fatto sopra AB, poichè $AF = AB$. La seconda $IGDH$, è il quadrato fatto sopra BC: perocchè essendo $AC = AE$, ed $AB = AF$, sarà BC, differenza delle linee AC,AB, uguale ad EF differenza delle linee AE, AF; ma in virtù delle parallele si ha $BC = IG$, e $EF = IH$, dunque la figura $IGDH$ è il quadrato di BC. Inoltre, la terza parte $BCGI$ esprime il rettangolo di AB in BC, perchè $AB = BI$, e l'ultima parte $EFIH$ è pure uguale allo stesso rettangolo di AB in BC, perchè $FI = AB$, ed $EF = BC$. Dunque il quadrato di AC si compone dei quadrati di AB, e di BC e del doppio rettangolo di AB in BC; ed è perciò uguale alla somma di tutte quelle figure. Il che bisognava dimostrare.

327. *Scolio.* È facile vedere che questa proposizione potrebbe enunciarsi così :

Se una retta è divisa in due parti, il quadrato di tutta la linea è uguale ai quadrati delle parti, ed al doppio del rettangolo contenuto da esse parti.

Giova anche osservare che il quadrato della retta AC divisa in due parti AB, BC è uguale alla somma de'rettangoli $ABHE$, $BCDH$ contenuti da tutta la linea e da ciascuna delle parti.

328. *Corollario.* È manifesto che se le rette AB,BC sono uguali i rettangoli FH, BG si cambiano in quadrati, onde il quadrato di AC sarà uguale al quadruplo del quadrato di AB,o di BC. Dunque « se una retta è divisa in due parti uguali, il quadrato dell' intera » retta sàra uguale al quadruplo del quadrato della metà ».

PROPOSIZIONE XCVIII — *TEOREMA*.

329. *Il quadrato* ACIF *della linea retta* AC *differenza delle due linee* AB *e* BC *è uguale al quadrato di* AB *più il quadrato di* BC, *meno il doppio rettangolo di* AB *in* BC (fig. 68).

Dim. Sopra AB si descriva il quadrato $ABDE$, si prenda $AF = AC$, e si conduca CH parallela a BD, e FG parallela ad AB; finalmente si costruisca sopra EF il quadrato $EFKL$, e le rette KF, FI risulteranno per diritto, per essere tutti gli angoli in F retti.

Il rettangolo $CBDH$ è uguale al rettangolo di AB in BC, poichè $BD = AB$. Parimente il rettangolo $KIHL$ è uguale al rettangolo di AB in BC, poichè $KI = KF + FI = BC + AC = AB$, ed $IH = BC$; dunque i due rettangoli $CBDH$, $KIHL$ sono uguali al doppio rettangolo di AB in BC. Ora se da tutta la figura $ABDLKF$, composta dei quadrati di AB, e di BC, si tolgano i due rettangoli accennati, resterà il quadrato di AC, dunque questo quadrato è uguale alla somma dei quadrati di AB, e di BC, meno il doppio rettangolo di AB in BC. Il che bisognava dimostrare.

330. *Scolio.* Questa proposizione potrebbe enunciarsi ancora nel seguente modo :

Se una retta è divisa in due parti, i quadrati di tutta la linea e di una sua parte sono eguali al doppio del rettangolo di tutta la linea nella stessa parte col quadrato della rimanente parte.

PROPOSIZIONE XCIX — *TEOREMA.*

331. *Il rettangolo compreso dalla somma e dalla differenza di due rette è uguale alla differenza dei quadrati delle stesse rette* (fig. 70).

Dim. Siano AB, BC le due rette date. Si costituisca sopra AB il quadrato $ABIF$, si prenda $AE = AC$, si conduca CG parallela ad AF; ed EL parallela ad AB; Indi sul prolungamento di questa retta si prenda $BK = BC$; e finalmente dal punto K si tiri KL parallela a BI che incontrerà EL nel punto L. Il rettangolo $AKLE$ avrà per base AK, cioè la somma delle due rette date AB, BC, e per altezza AE, ovvero la differenza delle stesse rette, perchè $AE = AC$. Ciò premesso, dico che il rettangolo $AELK$ è uguale al quadrato di AB meno il quadrato di BC.

Imperocchè, il rettangolo $AELK$ è composto dei due rettangoli $ABHE$, e $BHLK$: ma il rettangolo $BHLK$ è uguale al rettangolo $CDHB$, perchè hanno le basi eguali BK, BC, e la stessa altezza BH (n.° 266); ed è poi il rettangolo $CDHB$ eguale al rettangolo $EDGF$ (n.° 326), dunque il rettangolo $AELK$ è uguale alla somma de' due rettangoli $ABHE$, ed $EDGF$. Or questi due rettangoli formano tutto il quadrato $ABIF$ meno il quadrato $DHIG$, cioè formano il quadrato di AB meno il quadrato di BC; per conseguenza il rettangolo $AELK$ è uguale al quadrato di AB meno il quadrato di BC. Il che bisognava dimostrare.

* 332. *Scolio.* Se sul prolungamento di AC (fig. 71) si fosse presa $BK = AB$, cioè alla maggiore delle due rette date, il teorema avrebbe potuto ancora dimostrarsi In fatti il rettangolo $DCKL$ ha

ha per base CK, somma delle due rette date AB, BC, e per altezza CD, differenza delle rette medesime, perchè $CD = AC$. Or essendo il rettangolo CH eguale al rettangolo DF (n° 326), sarà il rettangolo $DCKL$ eguale alla somma de' due rettangoli $EABH$, $EDGF$, ovvero alla differenza de' quadrati delle rette AB, BC (*).

333. *Definizione*. Per *proiezione* di una retta terminata AC sopra una retta indefinita LE (fig. 65), s'intende la retta ME compresa fra i piedi delle perpendicolari abbassate dalle due estremità A, e C sulla linea LE.

Quindi la proiezione di AC sopra BC sarà la retta DC.

Dei quadrati fatti sopra i lati dei triangoli obliquangoli.

PROPOSIZIONE C — *TEOREMA*.

334. *In un triangolo ottusangolo* ABC *il quadrato del lato* AB *opposto all'angolo ottuso* ACB *è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati* AC, CB, *più il doppio del rettangolo compreso fra uno di essi* CB *e la retta* CD *interposta fra il vertice dell' angolo ottuso, e la perpendicolare* AD (fig. 72).

Dim Nel triangolo rettangolo ABD il quadrato di AB è uguale al quadrato di AD, più il quadrato di DB (n° 315); ma la retta DB è uguale alla somma delle due rette DC, CB, e per ciò il quadrato di DB è uguale al quadrato di DC, più il quadrato di CB, più il doppio rettangolo di CB in CD (n° 326); dunque il quadrato di AB è uguale ai quadrati di AD, di DC, di CB, ed al doppio rettangolo di BC in CD; ma la somma de' quadrati di AD, e di CD è uguale al quadrato di AC (n° 315), dunque il quadrato di AB equivale ai quadrati di AC, e di BC insieme col doppio rettangolo di CB in CD. Il che bisognava dimostrare.

335. *Scolio*. Questo teorema potrebbe enunciarsi in tal modo:

Nel triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è uguale alla somma de' quadrati degli altri due lati, più il doppio rettangolo contenuto da uno di questi lati e dalla proiezione dell' altro sul lato accennato.

(*) Questa proposizione si trova negli Elementi di Euclide divisa in due proposizioni differenti nel modo seguente.

1.° » Se alla retta CK divisa per mezzo in B, si aggiunga per diritto la » retta CA, il rettangolo di tutta la composta AK nell'aggiunta CA col » quadrato della metà BC eguaglia il quadrato della retta AB composta » della metà e dell' aggiunta (fig. 70).

2.° » Se la retta AK è divisa in due parti eguali in B, ed in due parti » disuguali in C, il rettangolo delle parti disuguali AC, CK col quadrato » del segmento intermedio CB eguaglia il quadrato della metà della retta » AK (fig. 71).

PROPOSIZIONE CI — *TEOREMA*.

336. ***In un triangolo*** **ABC** ***il quadrato del lato*** **AB** ***opposto ad un angolo acuto*** ACB ***è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati*** AC, CB, ***meno il doppio rettangolo compreso fra uno di essi*** BC, ***e la retta*** CD ***interposta fra il vertice dell' angolo acuto, e la perpendicolare*** AD (fig. 73).

Dim. La perpendicolare ***AD*** può cadere dentro, o fuori del triangolo ***ABC***.

1 Nel triangolo rettangolo ***ABD*** il quadrato di ***AB*** è uguale al quadrato della perpendicolare ***AD***, più il quadrato della retta ***BD***, ch' è la differenza delle due ***BC***, ***CD***: per conseguenza sarà il quadrato di ***AB*** uguale al quadrato di ***AD***, più il quadrato di ***BC***, più il quadrato di ***DC***, meno il doppio rettangolo di ***BC*** in ***CD*** (n° 329). Ma i quadrati di ***AD***, e di ***CD*** presi insieme equivalgono al quadrato di ***AC*** (n° 315), dunque il quadrato di ***AB*** è uguale alla somma dei quadrati di ***AC***, e di ***CB***, meno il doppio rettangolo di ***BC*** in ***CD***.

2. Se la perpendicolare ***AD*** cadesse sul prolungamento di ***CB*** fuori del triangolo ***ABC***, avrebbe luogo la medesima dimostrazione; solamente la linea ***BD*** sarebbe differenza delle linee ***CD***, ***CB***, mentre nel caso precedente era differenza delle linee ***CB***, ***CD***. Il che bisognava dimostrare.

337. ***Scolio.*** Questo teorema potrebbe enunciarsi in tal modo:
Il quadrato del lato opposto ad un angolo acuto di un triangolo è uguale alla somma de' quadrati degli altri due lati meno il doppio rettangolo contenuto da uno di questi due lati e dalla proiezione dell'altro sul lato accennato.

PROPOSIZIONE CII — *TEOREMA*.

338. ***In un triangolo qualunque*** ABC, ***se si divida la base*** BC ***per metà, e si congiunga il punto di mezzo*** E ***col vertice*** A ***dell' angolo opposto, la somma dei quadrati degli altri due lati*** AB, AC ***è uguale a due volte il quadrato della congiungente*** AE, ***più due volte il quadrato della semibase*** BE (fig. 74).

Dim. Si abbassi sulla base ***BC*** la perpendicolare ***AD***.
Nel triangolo ottusangolo ***ABE*** il quadrato di ***AB*** è uguale alla somma dei quadrati di ***AE***, e di ***EB***, più il doppio rettangolo di ***BE*** in ***ED***. Al contrario nel triangolo acutangolo ***AEC***, il quadrato di ***AC*** è uguale alla somma dei quadrati di ***AE***. e di ***EC***, meno il doppio rettangolo di ***EC*** in ***ED***. Ma il quadrato di ***EC*** è uguale al quadrato di ***EB***, ed il doppio rettangolo di ***BE*** in ***ED*** è lo stesso che il doppio rettangolo di ***EC*** in ***ED***, dunque la somma dei quadrati di ***AB***, e di ***AC*** equivale al doppio del quadrato di ***AE*** più il

doppio del quadrato di *BE*, poichè il doppio rettangolo aggiunto e sottratto si annulla. Il che bisognava dimostrare.

339. *Scolio* Nella fig. 74 si è supposto che la perpendicolare *AD* cada dentro del triangolo *ABC*; ma è manifesto che se cadesse fuori come nella fig. 75, il teorema avrebbe anche luogo (*).

PROPOSIZIONE CIII — *TEOREMA*.

340. *In ogni parallelogrammo* ABCD *la somma dei quadrati dei quattro lati equivale alla somma dei quadrati delle due diagonali* (fig. 45).

Dim. Imperocchè, tirando le diagonali *AC*, *BD*. essesi taglieranno scambievolmente in parti uguali nel punto *O* (n° 169); per conseguenza nel triangolo *ABC* la somma dei quadrati dei lati *AB*, *BC* sarà (n° 337) uguale a due volte il quadrato di *BO*, più due volte il quadrato di *AO*. Parimente nel triangolo *ADC* la somma dei quadrati dei lati *CD*, *DA* è uguale a due volte il quadrato di *OD*, ovvero di *OB*, più due volte il quadrato di *AO*. Laonde la somma dei quadrati dei quattro lati *AB*, *BC*, *CD*, *AD* sarà uguale a quattro volte il quadrato di *BO*, più quattro volte il quadrato di *AO*. Ma il quadruplo del quadrato di *BO* è uguale al quadrato di *BD* (n° 328), ed il quadruplo del quadrato di *AO* è uguale al quadrato di *AC*; dunque la somma dei quadrati dei lati del parallelogrammo *ABCD* è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali. Il che bisognava dimostrare.

(*) Se in vece de' quadrati delle rette *AB*, *AC*, *AE*, che sono ipotenuse de' tre triangoli rettangoli *ABD*, *ADC*, *ADE*, si mettano i quadrati de' cateti corrispondenti, il teorema qui sopra dimostrato darà

$$\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\,\overline{BE}^2 + 2\,\overline{ED}^2.$$

vale a dire
» Se la base di un triangolo si divida in due parti eguali, e si congiunga il
» punto di mezzo col vertice dell' angolo opposto alla base, la somma de'
» quadrati delle proiezioni degli altri due lati sulla base è uguale al doppio
» quadrato della semibase, più il doppio quadrato della proiezione della
» congiungente sulla base medesima.

Questo teorema trovasi negli Elementi di Euclide diviso in due proposizioni distinte nel modo seguente:

1.° » Se una retta *BC* (fig. 74) è divisa in parti eguali nel punto *E*, ed
» in parti disuguali nel punto *D*, i quadrati delle parti disuguali *BD*, *DC*
» sono il doppio del quadrato della metà *BE*, e del quadrato del segmento
» intermedio *ED*.

2.° » Se alla retta *BC* (fig. 75) divisa per mezzo in *E*, si aggiunga per
» diritto un' altra retta *CD*, i quadrati della composta *BD*, e dell' aggiun-
» ta *CD* sono il doppio del quadrato della metà *BE*, e della *ED* composta
» della metà e dell' aggiunta.

CAPITOLO XII.

APPLICAZIONE DE' PRINCIPJ CONTENUTI NE' DUE CAPITOLI PRECEDENTI ALLA RISOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI.

PROPOSIZIONE CIV — PROBLEMA.

341. *Dividere una linee retta in un dato numero di parti uguali o in parti proporzionali a più rette date* (fig. 58).

Sol Sia da dividersi in primo luogo la retta *AB* in un dato numero di parti uguali, per esempio, in tre parti. Dal punto *A* si conduca una retta indefinita *AH*, la quale faccia colla retta data un angolo qualunque; indi sopra *AH* si prendano tre parti uguali *AE*, *EF*, *FG*, ad arbitrio, si congiunga il punto *B* col punto *G*, e si tirino in fine le rette *FD*, *EC* parallele a *BG*. La retta *AB* sarà divisa nelle tre parti uguali *AC*, *CD*, *DB*.

In fatti le parallele *CE*, *DF*, *BG* dividono le rette *AB*, *AG* in parti proporzionali (n° 296); e perciò essendo uguali per costruzione le rette *AE*, *EF*, *FG*, ancora le rette *AC*, *CD*, *DB* devono essere uguali.

Sia in secondo luogo da dividersi *AB* in parti proporzionali ad altre rette date, per esempio in tre parti. Si prenderanno sopra *AH* tre parti *AE*, *EF*, *FG* uguali respettivamente alle tre rette date, indi si dimostrerà come sopra che la retta *AB* sarà divisa in tre parti proporzionali alle rette date. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE CV — PROBLEMA.

342. *Trovare la quarta proporzionale a tre rette date* (fig:76).

Sol. Si tirino due rette indefinite, che facciano un angolo qualunque *EAC*. Si prenda *AB* uguale alla prima della tre rette date, *BE* alla seconda, *AD* alla terza; indi si congiunga il punto *B* col punto *D*, e dal punto *E* si conduca *EC* parallela a *BD*: sarà *DC* la quarta proporzionale richiesta. Infatti (n° 293) nel triangolo *AEC* essendo *BD* parallela a *EC* si avrà $AB : BE :: AD : AC$. Il che bisognava fare.

343. *Scolio.* La terza proporzionale a due rette date si trova colla stessa costruzione, cioè prendendo *AB* uguale alla prima delle due rette date, *BE* alla seconda, ed *AD* uguale pure alla seconda. È manifesto che *DC* sarà la terza proporzionale cercata.

PROPOSIZIONE CVI — PROBLEMA.

344. *Trovare una media proporzionale fra due rette date*(fig. 77).

Sol. Sopra una medesima retta si prendano le parti *AB*, *BC* u-

guali respettivamente alle due rette date; indi si divida AC in due parti eguali nel punto O, e fatto centro in questo punto si descriva col raggio OA una mezza circonferenza. Finalmente s' innalzi sul diametro AC la perpendicolare BD, e si prolunghi finchè incontri la circonferenza in D: sarà BD la media proporzionale richiesta.

Infatti, si tirino le corde DA, DC, ed il raggio DO. Essendo $DO = OC$, e $DO = OA$ come raggi, saranno isosceli i due triangoli DOC, e DOA: per conseguenza (n° 110) sarà l'angolo $ODC = OCD$, e l'angolo $ODA = OAD$. Or questi quattro angoli presi insieme equivalgono a due angoli retti, perchè formano i tre angoli del triangolo ADC, dunque l'angolo ADC formato dagli angoli ADO, e CDO dev'essere uguale ad un angolo retto. Quindi il triangolo ADC è rettangolo; e perciò la perpendicolare DB è media proporzionale tra le due rette AB, BC (n° 312). Il che bisognava fare.

345. *Scolio.* L'angolo ADC nel semicerchio essendo retto, ed il triangolo DAC rettangolo; tutte le proprietà dimostrate (n° 311) rispetto al triangolo rettangolo si applicheranno al triangolo DAC con un semplice cangiamento di nomi, vale a dire,

1.° *La perpendicolare* DB *abbassata da un punto della circonferenza sul diametro è media proporzionale fra i due segmenti* AB, BC *del diametro medesimo.*

2.° *La corda* DA, *o* DC, *è media proporzionale fra il diametro ed il segmento adiacente alla corda medesima.*

3.° *I quadrati delle corde* DA, DC *stanno fra loro come i segmenti adiacenti* AB, BC *del diametro.*

4.° *Il quadrato di una corda* DA *sta al quadrato della perpendicolare* DB *come il diametro al segmento adiacente all'altra corda* DC.

5.° *Il quadrato del diametro sta al quadrato di una corda* DA, *o* DC *come lo stesso diametro al segmento adiacente alla corda medesima.*

6.° *Il quadrato del diametro è uguale alla somma de' quadrati delle due corde* DA, DC.

PROPOSIZIONE CVII — *PROBLEMA*.

346. *Sopra una retta data costruire un rettangolo equivalente ad un rettangolo dato* (fig. 49).

Sol. Sia EF la retta data, ed $ABCD$ il rettangolo dato. Supposto risoluto il problema sia $EFGH$ il rettangolo richiesto. Or essendo equivalenti i due rettangoli dovranno aver le basi in ragione reciproca delle altezze; perciò si avrà la proporzione

$$EF : AB :: AD : EH.$$

Quindi se si ritrovi una quarta proporzionale EH in ordine alle tre rette date EF, AB, AD, s'innalzi al punto E una perpendicolare uguale ad EH, e si compia il rettangolo $EFGH$, il problema proposto sarà risoluto. Il che bisognava fare.

347. *Scolio*. È manifesto che con la costruzione precedente si può descrivere sopra una retta data un rettangolo equivalente ad un quadrato dato: in tal caso la retta *EH* sarà terza proporzionale alle due rette *EF*, ed *AB*, che sarà il lato del quadrato.

PROPOSIZIONE CVIII — *PROBLEMA*.

348. ***Costruire un quadrato equivalente ad un parallelogrammo o ad un triangolo dato*** (fig. 51).

Sol. Sieno *BC*, ed *AD* la base e l'altezza del parallelogrammo o del triangolo.

1. Si trovi una media proporzionale *M* fra la base *BC* e l'altezza *AD*, sarà *M* il lato del quadrato equivalente al parallelogrammo *ABCE*. Infatti dalla proporzione *BC* : *M* : : *M* : *AD* si deduce (n° 218) che il prodotto di *BC* in *AD* è uguale al quadrato di *M*: ma quel prodotto è la misura del parallelogrammo, dunque il quadrato fatto sopra *M* è equivalente al parallelogrammo medesimo.

2. Si trovi una media proporzionale *N* fra la base *BC* e la metà dell'altezza *AD*, sarà *N* il lato del quadrato equivalente al triangolo *ABC*. Perocchè essendo *BC* : *N* : : *N* : $\frac{1}{2}$ *AD*, sarà il prodotto della base *BC* per la metà dell'altezza *AD*, ossia (n° 275) l'aja del triangolo, uguale all'aja del quadrato. Il che bisognava fare.

349. *Scolio*. Poichè ogni poligono si può trasformare in un triangolo equivalente (n°290), ed ogni triangolo in un quadrato equivalente, è manifesto che è sempre possibile di descrivere un quadrato equivalente ad un poligono dato. In questa trasformazione consiste la *quadratura* delle figure.

PROPOSIZIONE CIX — *PROBLEMA*.

350. ***Costruire un quadrato equivalente alla somma o alla differenza di due quadrati*** (fig. 78).

Sol. Si tirino due rette indefinite che facciano tra loro l'angolo retto *A*, indi sopra queste rette si prendano le parti *AC*, *AB* respettivamente uguali ai lati dei quadrati dati, e si congiunga il punto *B* col punto *C*, la retta *BC* sarà il lato del quadrato equivalente alla somma dei quadrati dati; poichè *BC* è l'ipotenusa del triangolo rettangolo *ABC*, di cui i cateti sono *AB*, ed *AC* (n° 315).

Dovendosi formare un quadrato equivalente alla differenza di due quadrati, si prenda *AC* uguale al lato del quadrato minore, indi fatto centro in *C* e con un raggio *CB* uguale al lato del quadrato maggiore si descriva un arco che tagli la retta indefinita *AB* in un punto *B*, sarà *AB* il lato del quadrato richiesto. Infatti il quadrato del cateto *AB* è uguale al quadrato del ipotenusa *BC* meno il quadrato dell'altro cateto *AC* (n° 315). Il che bisognava fare.

351. *Scolio*. È manifesto che colla costruzione fatta più sopra si

potrà costruire un quadrato uguale alla somma di quanti quadrati si vorrà; dappoichè siccome a due se ne può sostituire uno, così a tre se ne potranno sostituire due, e quindi un solo a tutti tre. Nello stesso modo a quattro quadrati si potrà sostituire un solo, e così in progresso.

PROPOSIZIONE CX — *PROBLEMA.*

352. *Sopra una retta data descrivere un poligono simile ad un poligono dato* (fig. 66).

Sol. Sia $ABCDE$ il poligono dato , ed OL la retta data , che si considera come lato omologo al lato ED.

Si decomponga il poligono in triangoli per mezzo delle diagonali AC, AD; indi si faccia l'angolo FLO uguale all'angolo ADE, e l'angolo FOL uguale all'angolo AED, il triangolo FOL sarà simile al triangolo AED (n° 302). Colla stessa costruzione si descriverà sopra FL il triangolo FLH simile al triangolo ACD, e sopra FH il triangolo FGH simile al triangolo ABC. È evidente che il poligono $FGHLO$ sarà il poligono richiesto (n° 319). Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE CXI — *PROBLEMA.*

353. *Essendo dati due poligoni simili, costruire un altro poligono simile ai due primi, e che sia uguale alla loro somma , o alla loro differenza* (fig. 80).

Sol. Siano P, e Q i due poligoni dati. Supponendo il problema risoluto, e rappresentando con R il poligono richiesto, in virtù della similitudine de'tre poligoni si avrà (n° 320)

$$R : P : Q : : \overline{GO}^2 : \overline{HI}^2 : \overline{KL}^2.$$

Ma dev'essere il poligono R eguale alla somma, o alla differenza de'due poligoni P, e Q, dunque in virtù della proporzione accenata anche il quadrato GO dovrà esser eguale alla somma o alla differenza de'due quadrati HI, e KL (n° 236). Quindi se si descriva un quadrato eguale alla somma,o alla differenza de'quadrati di due lati omologhi HI, KL de'poligoni dati P,Q, e sul lato GO del quadrato accennato si costruisca un poligono R simile ad uno de' poligoni dati, il problema proposto sarà risoluto. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE CXII — *PROBLEMA.*

354. *Costruire un poligono simile al poligono* P, *ed equivalente al poligono* Q (fig. 81).

Sol. Sia R il poligono richiesto. Dovendo essere simili i due poligoni P, e R staranno fra loro come i quadrati de' lati omologhi AB, CD (n° 320); ma dev' esser $R = Q$, perciò si avrà la proporzione

$$P : Q : : \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$$

Quindi sarebbe conosciuto il lato CD del poligono richiesto R, se il rapporto de' poligoni dati P, Q potesse esprimersi per mezzo dei loro lati, ma non potendo ciò farsi, perchè i poligoni accennati non sono simili, si trasformerà il poligono P, in un quadrato equivalente, di cui M sia un lato (n° 349), ed il poligono Q pure in un quadrato equivalente, di cui N sia un lato, allora sarà

$$P : Q : : M^2 : N^2.$$

Paragonando questa proporzione con la precedente risulterà

$$M^2 : N^2 : : \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2.$$

Ovvero (n° 245) $M : N : : AB : CD$. Dunque il problema proposto si riduce a trovare una quarta proporzionale CD in ordine alle tre rette M, N, AB, ed a descrivere sopra CD omologa ad BA un poligono R simile al poligono dato P, allora R sarà ancora equivalente a Q. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE CXIII — *PROBLEMA*.

355. *Costruire un poligono simile ad un poligono dato, e che stia a questo poligono nella data ragione di* M *a* N (fig. 80).

Sol. Sia Q il poligono dato, e P il poligono richiesto. Per le condizioni del problema si avrà $P : Q : : M : N$.

Ma i poligoni simili stanno fra loro come i quadrati de'lati omologhi; per conseguenza sarà $P : Q : : \overline{HI}^2 : \overline{KL}^2$. Paragonando questa proporzione con la precedente risulterà

$$\overline{HI}^2 : \overline{KL}^2 : : M : N$$

Quindi il problema proposto si riduce a descrivere un quadrato HI che stia al quadrato KL come $M : N$, problema che risolveremo nella proposizione seguente Se dunque si descriva sopra il lato HI omologo a KL un poligono P simile al poligono dato Q, il problema proposto sarà risoluto. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE CXIV — *PROBLEMA*.

356. *Costruire un quadrato che stia ad un quadrato dato nella data ragione di* M *a* N (fig. 79).

Sol. Essendo nel semicerchio ADB i quadrati delle corde DA, DB come i segmenti AC, CB del diametro (n° 345), sarà facile risolvere il problema proposto.

Si faccia $AC = M$, e $CB = N$, indi sopra AB come diametro si descriva il semicerchio ABD; al punto C s' innalzi sul diametro la perpendicolare CD, e si tirino le corde DA, DB. È manifesto che se la corda DB fosse uguale al lato Q del quadrato dato, l' altra corda DA sarebbe il lato del quadrato richiesto; nel caso contrario supponiamo $DB > Q$, allora si prenderà $DO = Q$, e dal punto O si condurrà la retta OS parallela al diametro AB, si avrà la proporzione (n° 294) $DA : DB : : DS : DO$, ovvero $\overline{DA}^2 : \overline{DB}^2 : : \overline{DS}^2 : \overline{DO}^2$.

Ma il quadrato di *DA* sta al quadrato di *DB* come *M* a *N*, dunque sarà $\overline{DS}^2 : \overline{DO}^2 :: M : N$, e però *DS* è il lato del quadrato richiesto.

Finalment se $DB \lessgtr Q$, si prenderà $DE = Q$, e la retta *EF* parallela al diametro *AB* darà *DF*, che sarà il lato del quadrato cercato. Il che bisognava fare.

357. *Scolio.* È facile vedere che per trovare due quadrati, di cui il rapporto sia eguale a quello di due rette *M*, e *N*, basta prendere $AC = M$, $CB = N$, descrivere sopra *AB* il semicerchio *ADB*, innalzare sul diametro *AB* la perpendicolare *CD*, e tirare in fine le corde *DA*, *DB*, che saranno i lati de'quadrati richiesti.

PROPOSIZIONE CXV — *PROBLEMA.*

358. ***Trovare due linee il cui rapporto sia uguale al rapporto di due quadrati dati*** (fig. 64).

Sol. Si pongano ad angoli retti i lati *AB*, *AC*, dei due quadrati dati, si congiunga il punto *B* col punto *C*, e si abbassi dal vertice *A* dell'angolo retto la perpendicolare *AD* sopra l'ipotenusa *BC*: i due segmenti *BD*, *DC* di questa ipotenusa sarannole linee richieste.

Infatti, si è dimostrato (n° 304) che nel triangolo rettangolo i quadrati dei cateti stanno fra loro come i segmenti adiacenti dell'ipotenusa. Il che bisognava fare.

359. *Scolio I.* Il problema precedente si potrebbe ancora risolvere in un altro modo, cioè con trovare la terza proporzionale, che chiameremo *X*, in ordine ai lati *A*, *B* dei due quadrati dati (fig.82).

In fatti essendo le rette *A*, *B*, *X* continuamente proporzionali, la prima *A* starà alla terza *X* come il quadrato di *A* al quadrato di *B* (n° 248).

360. *Scolio II.* Potendosi un poligono qualunque trasformare in un quadrato equivalente, si comprende facilmente che con la costruzione sopraddetta potrebbero trovarsi due linee il cui rapporto fosse uguale al rapporto di due poligoni qualunque (*).

CAPITOLO XIII.

DELLE PROPRIETA' DEL CERCHIO.

361. Il cerchio considerato in se stesso non presenta altra propietà se non quella inerente alla sua definizione; proprietà la quale

(*) La riduzione del rapporto di due poligoni qualunque a quello di due linee è uno dei più belli risultamenti, che si possono ottenere dalla geometria. Ma questo risultamento resterebbe nel campo delle astrazioni se mancasse il mezzo di esprimere il rapporto di due linee in numeri o esattamente o per approssimazione, secondo che le dette linee sono commensurabili, o incommensurabili. Ciò merita di essere osservato; dappoichè la geometria deve servire alle applicazioni, e non già ad alimentare una sterile contemplazione.

offre il mezzo di determinare con la legge di continuità una serie di punti equidistanti da un punto dato, e ciò è bastato per la costruzione di tutti i problemi precedentemente risoluti. Ma se il cerchio si considera nel suo incontro colla linea retta, si vedranno nascere proprietà importantissime, che vengeno ad esso comunicate dalle figure rettilinee risultanti dalle sue intersezioni con linee rette variamente situate. Lo studio delle proprietà del cerchio sotto questo aspetto merita la più grande attenzione; dappoichè la linea retta è il termine di paragone delle linee curve senza del quale non si potrebbero conoscere le affezioni di qualsisia curva.

362. Negli elementi di Geometria si espongano soltanto le proprietà più comuni del cerchio. Di queste andiamo ora ad occuparci; ma prima di esporle convien premettere le due seguenti definizioni:

Definizione I. Segmento di cerchio è la figura compresa fra l'arco e la corda.

Definizione II. Settore è la figura compresa fra un arco e i due raggi condotti all'estremità di esso.

363. È facile vedere che ad una medesima corda AB (fig. 83) corrispondono due archi ADB, $AECB$, e per conseguenza due segmenti; ma nelle seguenti proposizioni s'intende sempre parlare del più piccolo, purchè non si avverta il contrario.

PROPOSIZIONE CXVI — *TEOREMA*.

364. *Una linea retta non può incontrare la circonferenza di un cerchio in più di due punti* (fig. 83).

Dim. Imperocchè se una linea retta potesse incontrare la circonferenza in tre punti A, B, C, tirando i raggi OA, OB, OC, vi sarebbero tre rette uguali condotte da uno stesso punto O sopra una medesima linea retta ABC; il che è impossibile (n° 121). Dunque una linea retta non può incontrare la circonferenza in più di due punti. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXVII — *TEOREMA*.

365. *Ogni diametro divide il cerchio, e la sua circonferenza in due parti uguali* (fig. 83).

Dim. Sia AC un diametro qualunque. Si applichi la figura mistilinea AEC sopra la figura $ADBC$, conservando la base comune AC; è manifesto che la linea curva AEC dovrà coincidere colla linea curva $ADBC$, altrimenti o nell'una o nell'altra vi sarebbero punti non ugualmente distanti dal centro O, il che non può essere. Dunque il diametro divide il cerchio, e la sua circonferenza in due parti uguali. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXVIII — *TEOREMA*.

366. *Ogni corda è minore del diametro* (fig. 83).

Dim. Sia AB una corda qualunque; per una delle sue estremità A si tiri il diametro AC, poi si conduca il raggio OB. Nel triangolo AOB il lato AB è minore della somma degli altri due OA, OB, ma la somma di questi due raggi è uguale al diametro AC; dunque ogni corda è minore del diametro. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXIX — *TEOREMA*.

367. *In un medesimo cerchio, o in cerchi uguali, gli archi uguali sono sottesi da corde uguali; reciprocamente le corde uguali sottendono archi uguali* (fig. 84).

Dim. Sia l'arco AMD uguale all'arco ENG; dico che la corda AD sarà uguale alla corda EG.

Perocchè essendo uguali i due cerchi, soprapponendo il diametro AB al diametro EF, la semicirconferenza $AMDB$ coinciderà colla semicirconferenza $ENGF$, e l'arco AMD con l'arco ENG, ed il punto D col punto G; onde la corda AD sarà uguale alla corda EG.

Reciprocamente se la corda AD è uguale ad EG, sarà l arco AMD uguale all'arco ENG. Imperocchè tirando i raggi CD, OG, i due triangoli ACD, EOG avranno i tre lati rispettivamente uguali, e per conseguenza saranno uguali. Laonde applicando il semicerchio ADB sul semicerchio EGF, l'angolo ACD caderà sul suo uguale EOG; e però l'arco AMD coinciderà evidentemente con l'arco ENG. Il che bisognava dimostrare.

368. *Corollario*. La dimostrazione precedentente fa conoscere chiaramente che, *quando due archi d'un medesimo cerchio, o di cerchi uguali sono uguali*;

1°. *Gli angoli ai centri ACD, EOG sono uguali, e reciprocamente*;

2°. *i settori $AMDC$, $ENGO$, ed i segmenti $AMDm$, $ENGn$, sono anche uguali*.

PROPOSIZIONE CXX — *TEOREMA*.

369. *In un medesimo cerchio, o in cerchi uguali, il maggiore di due archi è sotteso da una corda maggiore, e reciprocamente, purchè i detti archi sieno minori di una semicirconferenza* (fig. 84).

Dim. Sia l'arco AH maggiore dell'arco AD; dico che la corda AH è maggiore della corda AD. Infatti tirando i raggi CD, CH, si avranno i due triangoli ACH, ACD, ne'quali i due lati AC, CH sono uguali a'due lati AC, CD; ma l'angolo ACH è maggiore dell'angolo ACD; perciò (n° 90) sarà il terzo lato AH maggiore del terzo lato AD.

Reciprocamente, se la corda AH è maggiore della corda AD, si conchiuderà per mezzo degli stessi triangoli ACH, ACD che l'angolo ACH è maggiore dell'angolo ACD (n° 91); e per conseguenza sarà l'arco AH maggiore dell'arco AD.

370. *Scolio*. Si è supposto che gli archi dati fossero minori della semicirconferenza; poichè è manifesto che se fossero maggiori avrebbe luogo la proprietà contraria.

PROPOSIZIONE CXXI — *TEOREMA*.

371. ***Il raggio perpendicolare ad una corda divide tanto questa corda, quanto l' arco sotteso in due parti uguali*** (fig. 85).

Dim. Sia il raggio CG perpendicolare alla corda AB, e si conducano i raggi CA, CB, come pure le corde AG, BG.

Essendo retti gli angoli formati intorno al punto D, i triangoli ADC, DCB, ADG, BDG saranno rettangoli. Ora ne' due primi il cateto CD è comune, e la ipotenusa $CA = CB$ come raggi, dunque l' altro cateto AD sarà uguale a DB (n° 315); e però la corda AB è divisa in due parti uguali nel punto D. Parimente negli altri due triangoli essendo il cateto $AD = DB$, ed il cateto DG comune, sarà la ipotenusa $AG = GB$, ossia la corda AG uguale alla corda GB; ma corde uguali sottendono archi uguali (n° 367), dunque l' arco $AG = GB$ e per conseguenza l' arco AGB rimane diviso per metà nel punto G. Il che bisognava dimostrare.

372. *Scolio*. Dalla dimostrazione precedente risulta manifesto che *il centro, il punto di mezzo d' un arco ; ed il punto di mezzo della sua corda si trovano sopra una medesima linea retta perpendicolare ad essa corda*. Ma, bastano due punti per determinare la posizione di una linea retta; dunque ogni linea retta che passa per due dei tre punti accennati passerà necessariamente anche pel terzo; e sarà perpendicolare alla corda.

* 373. *Corollario*. Due corde AB, DC (fig. 95) che non passano pel centro del cerchio non possono segarsi per mezzo ; poichè se ambedue fossero divise in due parti eguali nel punto O, la retta che congiunge il centro col punto O d'intersezione sarebbe perpendicolare alle due corde ; ed allora dal punto O si potrebbero innalzare due perpendicolari alla retta mentovata; il che è assurdo (n° 57).

PROPOSIZIONE CXXII — *PROBLEMA*.

374. ***Dividere un arco in due parti eguali*** (fig. 21).

Sol. Sia BD l' arco dato. Si tiri la corda BD, la quale si divida in due parti eguali nel punto C; indi da questo punto s' innalzi sulla corda accennata la perpendicolare CA, che si prolunghi fino all' incontro dell'arco BD, il punto d' incontro O sarà il punto di mezzo dell' arco in virtù della proposizione precedente. Il che bisognava fare.

375. *Scolio*. È manifesto che dividendo con la costruzione indicata ciascuna metà dell'arco BD in due parti eguali, risulterà tutto l'arco diviso in 4 parti eguali, e si vede subito come potrebbe dividersi in 8, in 16, in 32, ecc. parti eguali.

PROPOSIZIONE CXXIII — *TEOREMA*.

376. *Due corde eguali sono ugualmente distanti dal centro, e di due corde disuguali la minore è la più distante dal centro* (fig.86).

Dim. 1.° Sieno le corde AB, DE uguali; si abbassino dal centro le perpendicolari CF, CG, e si conducano i raggi CA, CD.

Ne' triangoli rettangoli CAF, DCG, le ipotenuse CA, CD sono uguali come raggi di un medesimo cerchio; parimente i cateti AF, DG sono uguali come metà delle corde uguali AB, DE (n° 371); dunque gli altri due cateti CF, CG saranno uguali (n° 315), e però le corde uguali AB, DE sono equidistanti dal centro.

2.° Sia ora la corda AH maggiore della corda DE; dovrà essere l'arco ANH maggiore dell'arco DME (n° 369): si prenda dunque sull'arco ANH la parte $ANB = DME$, si tiri la corda AB, e si abbassino le perpendicolari CF, CI sulle corde AB, AH.

La perpendicolare CI è minore dell'obliqua CO (n° 119), ed a più forte ragione sarà minore della perpendicolare CF; ma questa è uguale a CG, dunque sarà CI minore di CG; e per conseguenza di due corde disuguali la minore è la più distante dal centro. Il che bisognava dimostrare.

Della misura degli angoli.

377. Analogamente a quanto abbiam detto nel § 368 per un caso particolare, si chiama in generale *angolo al centro* ogni angolo che ha il vertice nel centro di un cerchio, ed è perciò formato da due raggi. Si dirà poi *angolo iscritto* quello il cui vertice è alla circonferenza ed è formato da due corde. Passiamo ad occuparci della misura di queste due specie di angoli.

PROPOSIZIONE CXXIV — *TEOREMA*.

378. *In un medesimo cerchio, o in cerchi uguali, gli angoli al centro stanno fra loro come gli archi compresi fra i loro lati* (fig. 87).

Dim. Siano gli angoli al centro ACB, ACD; dico che stanno fra loro come gli archi AB, AD.

Imperocchè, supponendo primieramente che gli archi sieno commensurabili, e che la loro comune misura K portata ripetutamente su gli archi AB, AD sia contenuta m volte nel primo ed n volte nel secondo, è manifesto (n° 368) che anche l'angolo ACB rimarrà

diviso in m parti uguali, e l' angolo ACD in n parti uguali, onde l' angolo ACB starà all' angolo ACD come l' arco AB all' arco AD.

Che se poi gli archi AB, AD fossero incommensurabili fra loro, la proposizione precedente sussisterebbe in egual modo. Infatti si faccia l' angolo ACD' uguale all' angolo ACD, e si supponga che la ragione dei due angoli ACB, ACD' in luogo di equivalere a quella degli archi AB, AD' equivalga a quella degli archi AB, AO, essendo AO maggiore di AD'. Qualunque differenza passi fra AO, ed AD', è chiaro che si potrà sempre dividere l'arco AB continuamente per metà fino ad avere parti così piccole che una almeno delle divisioni cada in qualche punto I fra D' ed O. In tal caso condotto il raggio CI, gli angoli ACB, ACI, e gli archi compresi AB, AI saranno rispettivamente commensurabili, onde si potrà stabilire la proporzione

$$ACB \,.\, ACI :: AB : AI.$$

Ma per ipotesi si ha

$$ACB : ACD' :: AB : AO,$$

dunque essendo in queste due proporzioni gli antecedenti uguali, si avrebbe (n° 234) fra i conseguenti la proporzione

$$ACI : ACD' :: AI : AO,$$

la quale è insussistente, poichè l' antecedente ACI è maggiore del conseguente ACD', mentre l'altro antecedente AI è minore del conseguente AO. Nello stesso modo si ragionerebbe se l' arco AO si supponesse minore dell' arco AD'; dunque dovrà essergli uguale, e però in tutti i casi gli angoli al centro di cerchi uguali stanno come gli archi compresi fra i loro lati. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXXV — *TEOREMA*.

379. *L' angolo al centro ha per misura l' arco compreso fra i suoi lati* (fig: 87).

Dim. Dalle nozioni generali date nel (n° 250) intorno alla misura delle quantità si desume che per misurare un angolo qualunque basta trovare il suo rapporto ad un angolo conosciuto preso per unità di misura; e siccome l'angolo retto è invariabile, così esso è stato prescelto per unità di misura degli angoli, onde volendosi misurare l' angolo al centro ACD, la quistione si riduce a trovare il suo rapporto coll'angolo retto. Ma da un'altra parte l'arco di cerchio compreso fra i lati d'un angolo retto, che ha il vertice al centro d'un cerchio, essendo la quarta parte della circonferenza, o un *quadrante*, si avrà pel teorema precedente.

Angolo ACD : *Angolo Retto* :: *Arco* AD : *Quadrante*:

dalla quale proporzione si deduce che il numero, da cui viene espresso il rapporto dell'arco AD al quadrante, esprime ancora il rapporto dell'angolo ACD all'angolo retto; e perciò si dice che l'angolo al

centro ha per misura l'arco compreso fra i suoi lati. Il che bisognava dimostrare.

380. *Scolio.* Da ciò che precede apparisce chiaramente che quantunque la misura degli angoli per mezzo degli archi di cerchio sia in certo modo indiretta, pure è facile ottenere dagli archi la misura diretta ed assoluta. Infatti se si paragona l'arco che serve di misura ad un angolo dato col quadrante, si avrà il rapporto dell'angolo accennato all'angolo retto; vale a dire si avrà la misura assoluta dell' angolo dato. È stata preferita la misura indiretta alla misura assoluta, perchè la prima riesce più comoda nella pratica.

PROPOSIZIONE CXXVI — TEOREMA.

381. *L'angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati* (fig. 88.).

Dim. Sia l'angolo iscritto *BAD*; dico che avrà per misura la metà dell'arco *BD* compreso fra i suoi lati.

Supponiamo in primo luogo che il centro *O* del cerchio sia situato sopra uno de'lati *AD*, e si conduca il raggio *OB*. L'angolo *BOD*, esterno al triangolo *BAO*, è uguale alla somma dei due interni opposti *OAB*, *ABO* (n° 107): ma il triangolo *ABO* essendo isoscele si ha l'angolo *OAB* uguale all'angolo *ABO*: dunque l'angolo *BOD* è doppio dell'angolo *BAD*. Ora l'angolo *BOD* come angolo al centro ha per misura l'arco *BD*; dunque l'angolo *BAD* avrà per misura la metà dell'arco *BD*.

Supponiamo in secondo luogo che il centro cada dentro l'angolo *BAD* (fig. 89): si tirino il diametro *AE*, ed i raggi *OB*, *OD*. Per la dimostrazione precedente sarà l'angolo *BOE* doppio dell'angolo *BAO*, e l'angolo *DOE* doppio dell'angolo *DAO*; per conseguenza l'angolo al centro *BOD* sarà doppio dell'angolo iscritto *BAD*. Laonde anche in questo caso l'angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

Finalmente supponiamo che il centro *O* cada fuori dell' angolo *BAD* (fig. 90): si tiri il diametro *AE*. L'angolo *BAE* ha per misura la metà dell'arco *BE*; parimente l'angolo *DAE* ha per misura la metà dell'arco *DE*; dunqne l'angolo *BAD*; che è la differenza dei due angoli accennati, avrà per misura la metà dell'arco *BD*, differeuza degli archi *BE*, *DE*. Quindi in tutti i casi l'angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati. Il che bisognava dimostrare.

382. *Corollario I.* Gli angoli *AMB*, *ANB* iscritti nel medesimo segmento *AMNB* (fig. 91) sono uguali, perchè tutti hanno per misura la metà di un medesimo arco *ACB*.

II. Ogni angolo *ABC* (fig. 83) iscritto nel semicerchio è retto; stantechè ha per misura la metà della semicirconferenza *AEC*, ossia un quadrante. Questa importante verità è stata già dimostrata (n° 344).

III. Ogni angolo *AMB* (fig. 91) iscritto in un segmento maggiore del semicerchio è acuto, avendo esso per misura la metà dell'arco *ACB* minore della semicirconferenza.

Al contrario ogni angolo *ACB* iscritto in un segmento minore del semicerchio è ottuso, perchè ha per misura la metà dell'arco *AMB* maggiore della semicirconferenza.

IV. Gli angoli opposti *ANB*, ed *ACB* (fig. 91) di un quadrilatero, di cui i vertici trovansi allogati sulla circonferenza, sono presi insieme uguali a due retti; perocchè la somma dei due archi che misurano questi angoli è uguale alla semicirconferenza.

* *V.* Ogni angolo eccentrico *BOC* (fig.95) ha per misura la semisomma degli archi *AD*, *BC* compresi fra i suoi lati, perchè essendo esterno del triangolo *OBD* uguaglia la somma degli angoli *B*, e *D* i quali hanno per misura le metà degli archi *AD*, *BC*.

Inoltre ogni angolo *BOC* (fig. 96) il cui vertice è fuori del cerchio , ha per misura la semidifferenza degli archi *BC*, *AD* compresi fra i suoi lati ; perocchè l'angolo *BOC* è differenza fra l'esterno *BAC*, e l'interno *ACO* del triangolo *AOC*, e gli angoli *BAC*, *ACO* sono misurati dalle metà degli archi *BC*, *AD*.

VI. L'angolo al centro è doppio dell'angolo che ha il vertice alla circonferenza, e che poggia sullo stesso arco.

Delle tangenti, e delle secanti del cerchio.

383. *Definizione I.* Una linea retta che ha un solo punto di comune colla circonferenza del cerchio dicesi *tangente* ; e questo punto comune chiamasi *punto di contatto*.

384. *Definizione II.* Ogni retta che taglia la circonferenza del cerchio , e che è prolungata al di fuori, dicesi *secante*.

PROPOSIZIONE CXXVII — *TEOREMA*.

385. ***La perpendicolare innalzata da un punto della circonferenza del cerchio sul raggio che passa per questo punto, è una tangente del cerchio : reciprocamente ogni tangente è perpendicolare al raggio condotto al punto di contatto*** (fig. 92).

Dim. Sia *BC* perpendicolare al raggio *AO*; dico che sarà tangente del cerchio *EAD*. Imperocchè l'obliqua *OB* condotta ad arbitrio dal centro sopra *BC* è maggiore della perpendicolare *OA* , o della sua uguale *OD*; e però il punto *B* è fuori del cerchio, e la retta *BC* non avendo di comune colla circonferenza che il solo punto *A* sarà tangente del cerchio medesimo.

Reciprocamente, se *BC* tocca la circonferenza nel punto *A*, qualunque retta *OB* condotta dal centro *O* sopra *BC* avrà una parte *DB* fuori del cerchio, eccettuato soltanto il raggio *OA*; per conseguenza la retta *OA* sarà la più corta di tutte le linee che dallo stes-

so punto O si possono condurre ad una medesima retta BC; e però sarà perpendicolare a BC (n° 119). Il che bisognava dimostrare.

386. *Corollario.* La retta AB essendo la sola perpendicolare che si possa innalzare sul raggio AO dal punto A, ne segue che per un dato punto della circonferenza non si può condurre che una sola tangente.

PROPOSIZIONE CXXVIII — *TEOREMA.*

387. *L' angolo formato da una tangente e da una corda ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati* (fig. 93).

Dim. Al punto di contatto A si conduca il diametro AD. L'angolo BAD essendo retto (n° 385) ha per misura la metà della semicirconferenza ACD: parimente l'angolo iscritto CAD ha per misura la metà dell'arco CD, dunque l'angolo BAC, formato dalla tangente BA e dalla corda AC, che è la differenza de'due angoli BAD, CAD, avrà per misura la metà dell'arco AC; differenza degli archi ACD, e CD.

Nello stesso modo si dimostra che l'angolo EAC, che è la somma degli angoli EAD, CAD, ha per misura la metà dell'arco $ANDC$. Dunque l'angolo formato da una tangente e da una corda è misurato dalla metà dell'arco compreso fra i suoi lati. Il che bisognava dimostrare.

388. *Scolio.* Siccome l'angolo iscritto nel segmento ANC ha per misura la metà dell'arco AC, e similmente l'angolo iscritto nel segmento AC ha per misura la metà dell'arco ANC, ne segue che l'*angolo formato da una tangente e da una corda è uguale all' angolo iscritto nel segmento alterno del cerchio*:

PROPOSIZIONE CXXIX — *TEOREMA,*

389: *Gli archi intercetti in un medesimo cerchio, fra due secanti parallele, o fra una tangente ed una secante parallele, sono uguali* (fig. 94).

Dim. Sieno le secanti BC, DE, e la tangente FG, e si conduca il raggio OA. Essendo OA perpendicolare ad FG, lo sarà ancora alle secanti BC, DE (n° 76) ; laonde (n° 371) dividerà in due parti uguali gli archi BAC, e DAE. Per conseguenza se dagli archi AB, ed AC, uguali come metà dell' arco BAC, si tolgono gli archi AD, ed AE uguali come metà dell' arco DAE, resterà l' arco BD uguale all' arco CE; il che prova la prima parte del teorema: l' uguaglianza degli archi AB ed AC prova la seconda. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXXX — *TEOREMA*.

390. *Le parti di due corde, che si tagliano in un cerchio, sono reciprocamente proporzionali* (fig. 95).

Dim. Le corde AB, CD si taglino nel punto O; dico che si avrà

$$AO : DO :: CO : OB.$$

Imperocchè, conducendo AC e BD si hanno i triangoli ACO, BOD, ne' quali gli angoli in O sono uguali come opposti al vertice, e l'angolo A è uguale all' angolo D, perchè iscritti in un medesimo segmento (n° 382); dunque questi triangoli sono simili (n° 302), ed i lati omologhi danno la proporzione

$$AO : DO :: CO : OB.$$

Il che bisognava dimostrare.

391. *Corollario*. Poichè in ogni proporzione il prodotto dei termini estremi è uguale a quello dei medj (n° 217), si avrà

$$AO \times OB = DO \times OC$$

vale a dire che *se due corde si tagliano, il rettangolo compreso fra le due parti dell' una è equivalente al rettangolo compreso fra le due parti dell altra.*

PROPOSIZIONE CXXXI — *TEOREMA*.

392. *Due secanti che partono da un punto preso fuori del cerchio, e terminano alla parte concava della circonferenza, sono reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne* (fig. 96).

Dim. Sieno le due secanti OB, OC condotte dal punto O; dico che si avrà

$$OB : OC :: OD : OA.$$

Infatti tirando AC, e BD, i triangoli OAC, OBD hanno l' angolo O comune, e gli angoli B e C uguali come iscritti nello stesso segmento $ABCD$ (n° 382); dunque questi triangoli sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione

$$OB : OC :: OD : OA.$$

Il che bisognava dimostrare.

393. *Corollario*. Dalla precedente proporzione si deduce che

$$OB \times OA = OC \times OD;$$

cioè i rettangoli di due secanti nelle loro parti esterne sono equivalenti.

394. *Scolio*. Le due proposizioni precedenti possono essere riunite in una sola, che si enuncia così: *se due secanti s' incontrano dentro o fuori del cerchio, le quattro parti di esse, che sono comprese fra il punto d' incontro e la circonferenza, sono reciprocamente proporzionali.*

PROPOSIZIONE CXXXII — *TEOREMA*.

395. *Se da un punto preso fuori del cerchio si conduca una tan-*

gente, ed una secante, la tangente sarà media proporzionale fra la secante e la sua parte esterna (fig. 97).

Dim. Dal punto O si conduca la tangente OA, e la secante OC; dico che si avrà

$$OC : OA :: OA : OD.$$

Imperocchè, tirando le corde AD, AC risulteranno i triangoli OAD, OAC, ne' quali l'angolo O è comune ad ambidue, e l'angolo OAD formato da una tangente e da una corda è uguale all'angolo C iscritto nel segmento alterno ACD; dunque i due triangoli sono simili, e si ha la proporzione

$$OC : OA :: OA : OD.$$

Il che bisognava dimostrare.

396. *Corollario.* Poichè in una proporzione continua (n° 218), il prodotto de' termini estremi è uguale al quadrato del termine medio, si avrà

$$OC \times OD = \overline{OA}^2.$$

vale a dire che *il quadrato della tangente è equivalente al rettangolo della secante nella sua parte esterna.* E si osservi che questa proposizione è un caso particolare della precedente, nel quale una delle secanti, divenendo tangente, si confonde con la sua parte esterna, ed il rettangolo si cambia in quadrato.

Delle intersezioni e de' contatti de' cerchi.

397. *Definizione I.* Due circonferenze *s'intersegano* quando una parte di ciascuna di esse entra nell'aja del cerchio terminato dall'altra.

398. *Definizione II.* Due circonferenze si *toccano* quando hanno un solo punto di comune, il quale si chiama *punto di contatto, o contatto.*

PROPOSIZIONE CXXXIII — *TEOREMA.*

399. *Per tre punti non situati in linea retta può sempre passare una circonferenza di cerchio, e non può passarne che una sola* (fig. 98.)

Dim. Siano A, B, C, i tre punti dati. Si uniscano con le rette AB, BC, le quali si dividano per metà ne' punti D, F, e s'innalzino su di esse le perpendicolari DE, FG, che s'incontreranno in un punto O. Infatti, se si congiunga il punto D col punto F, la somma degli angoli interni da una stessa parte EDF, GFD è minore di due retti, perchè l'angolo EDF è parte dell'angolo retto EDB, e l'angolo GFD è parte dell'angolo retto GFB.

Si uniscano le rette OC, OB, OA; ed essendo $AD = DB$, le oblique OA, OB saranno eguali (n° 119), e similmente sarà $OB = OC$.

Quindi la circonferenza descritta col centro in O e col raggio OA passerà per i tre punti dati A, B, C; nè per gli stessi punti potrà passare altra circonferenza. Perocchè, se ciò fosse possibile, il centro di questa seconda circonferenza dovrebbe sempre trovarsi sulle due perpendicolari DE, FG, altrimenti non potrebbe essere equidistante da'punti A, B, e dai punti B, C. Ma quelle due rette non possono avere più di un punto O di comune; dunque una è la circonferenza che può passare per i tre punti dati. Il che bisognava dimostrare.

*400. *Corollario I*. Se da un punto preso dentro di un cerchio si tirino alla circonferenza tre rette uguali, quel punto sarà il centro del cerchio.

401. *Corollario II*. Due circonferenze non possono avere più di due punti di comune senza confondersi in una sola.

PROPOSIZIONE CXXXIV — *TEOREMA*.

402. *Se due circonferenze hanno due punti di comune s'intersegano* (fig. 99).

Dim. Siano due circonferenze DHC, e CEH, o $CE'H$, che abbiano i punti H, C di comune. Dico che queste circonferenze devono intersegarsi.

Infatti, non volendo che la circonferenza CEH penetri nel cerchio DHC, o che la circonferenza $CE'H$ esca fuori del cerchio medesimo, bisognerebbe supporre che le circonferenze, oltre i due punti H, C, avessero di comune tutto l'arco HC, ed allora le due circonferenze avendo più di due punti di comune si confonderebbero in una sola. Dunque se le due circonferenze si trovano situate come nella figura, devono necessariamente intersegarsi.

Potrebbe supporsi che le due circonferenze fossero disposte in modo che la linea HC, la quale unisce i due punti ad esse comuni passasse pel centro di uno dei due cerchi come nella fig. 100, o che fosse una corda comune ad entrambi come nella fig. 101 ; ma l'impossibilità di queste due supposizioni si rende manifesta dalla seguente dimostrazione che si applica ad ambedue i casi.

Rappresentino A, B i centri de' cerchi (fig. 100, 101); si uniscano questi centri e si prolunghi la congiungente sino alla circonferenza esteriore. Nel triangolo ABC, sarà il lato AC minore di $AB+BC$, e poichè $BC=BD$, come raggi di un medesimo cerchio, ed $AC=AE$ per la stessa ragione, sarebbe AE minore di $AB+BD$, cioè il tutto minore della parte, il che è assurdo. Dunque due circonferenze s'intersegano quando hanno due punti di comune. Il che bisognava dimostrare.

403. *Scolio*. Due circonferenze che hanno un sol punto di comune (fig. 105, 106) non possono intersegarsi; perocchè se la circonferenza, il cui raggio è BC (fig. 105) entrasse nel cerchio terminato dall'altra, non potrebbe uscire da quello spazio chiuso senza

incontrare di nuovo in altro punto la circonferenza *NC* che lo circonda; e però le due circonferenze avrebbero due punti comuni, contro l' ipotesi.

Che se si volesse supporre che la circonferenza, il cui raggio è *BC* (fig. 106) entrasse nel cerchio terminato dall'altra, e ne uscisse per un solo e medesimo punto *C*, allora è evidente che essa non ne uscirebbe nel fatto, ma rimarrebbe tutta compresa nel cerchio *NC*, dimodochè l'intersezione non avrebbe più luogo. Dunque due circonferenze che hanno un sol punto di comune non possono intersegarsi, e poichè due circonferenze che hanno più di due punti di comune si confondono in una sola (n° 401) si potrà conchiudere che *due circonferenze s'intersegano sempre in due punti*; *o non s'intersegano*.

PROPOSIZIONE CXXXV — *TEOREMA*.

404. *Se due cerchi s'intersegano, la retta che passa per i centri è perpendicolare a quella che unisce i due punti d'intersezione, e la divide per metà* (fig. 102):

Dim. Imperocchè, se pel punto di mezzo *I* della retta *CD* che unisce i due punti d'intersezione, ed è corda comune ai due cerchi, s'innalzi sulla corda medesima una perpendicolare, questa dovrà passare per i centri *A* e *B* (n° 338). Ma per due punti non può passare che una sola linea retta; dunque, viceversa, la retta *AB* che unisce i due centri è perpendicolare alla corda *CD*, e la divide per mezzo. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXXXVI — *TEOREMA*.

405. *Se due cerchi s'intersegano, la distanza de'centri è minore della somma de'raggi, e maggiore della loro differenza* (fig. 102).

Dim. Perocchè quando due cerchi si tagliano i due punti d'intersezione *C*, e *D* devono trovarsi fuori della linea de'centri (n° 402); e per conseguenza potrà sempre formarsi un triangolo *ACB* fra ciascun punto d'intersezione ed i due centri. Ma in ogni triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due, e maggiore della loro differenza (n° 83), dunque se due cerchi si tagliano la distanza de'cerchi è minore della somma de'raggi, e maggiore della loro differenza. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXXXVII — *TEOREMA*.

406: *Se la distanza de'centri di due cerchi è minore della somma de' raggi, e maggiore della loro differenza, i cerchi si taglieranno* (fig. 102).

Dim. Perocchè, in tal caso con i due raggi, e la retta che unisce

i centri si potrà (n° 127) costruire il triangolo ACB da una parte di AB, ed il triangolo ADB eguale al primo dall'altra parte. Quindi le due circonferenze avranno due punti di comune C, D; e per conseguenza dovranno intersegarsi. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXXXVIII — *TEOREMA*.

407. *Se due cerchi si toccano, la retta che passa per i centri, passerà ancora pel punto di contatto* (fig. 103, 104).

Dim. I. Imperocchè, se i cerchi si toccano esternamente (fig. 103); ed il punto di contatto C esistesse fuori della linea AB che passa per i centri A, e B, si potrebbe formare il triangolo ABC, in cui la somma dei due lati o raggi AC, CB sarebbe minore del terzo lato AB composto dei due raggi e di uno spazio intermedio; il che è assurdo.

II. Se i cerchi si toccano internamente (fig. 104), ed il punto di contatto C si trovasse fuori della linea AE che passa per i centri A, e B, si formerebbe il triangolo ABC, in cui la somma di due lati sarebbe minore del terzo. Infatti, $EB + BA = AC$; ma BC, ovvero BO, è minore di EB, dunque $BC + BA$ sarà minore di AC; il che è assurdo, essendo due lati di un triangolo presi insieme maggiori del terzo lato. Il che bisognava dimostrare.

408. *Corollario I.* Di qui si deduce che: *se due cerchi si toccano la distanza dei centri è uguale alla somma; o alla differenza dei raggi, secondo che i cerchi si toccano esternamente, o internamente.*

409. *Corollario II.* Se due circonferenze non hanno alcun punto comune, sono interamente separate l'una dall'altra, potendo però esser situate una fuori dell'altra, o una dentro l'altra. Quindi nel primo caso la distanza de'centri è maggiore della somma de'raggi, e nel secondo minore della loro differenza.

*410. *Scolio.* Dalle cose fin qui dimostrate risulta manifesto che tutti i cerchi (fig. 106), i quali hanno i loro centri sulla linea AB, e passano pel punto C, sono tangenti l'uno all'altro, vale a dire hanno il solo punto C comune. Inoltre, se per questo punto s'innalzi sopra AB la perpendicolare DF, questa sarà tangente comune a tutti quei cerchi. Ma quantunque tra l'arco CN e la tangente DF si possa far passare una infinità di circonferenze diverse, pure non vi si può condurre alcuna linea retta; dappoichè in tal caso vi sarebbero nel punto C due tangenti, il che è assurdo (n° 386). Quindi l'*angolo del contatto*, cioè l'angolo DCN formato dall'arco e dalla tangente, è minore di qualunque angolo rettilineo dato, per quanto piccolo si voglia supporre.

PROPOSIZIONE CXXXIX — *TEOREMA*.

411. *Se la distanza de'centri di due cerchi è uguale alla somma, o alla differenza de'raggi, i cerchi si toccheranno* (fig. 105, 106).

Dim. Sia la distanza *AB* de' centri eguale alla somma de' raggi *AC*, *CB* (fig. 105), o alla loro differenza (fig. 106). Dico che i due cerchi si toccheranno.

Imperocchè, è evidente che il punto *C* è comune alle due circonferenze; nè può esservene altro; perchè in tal caso le due circonferenze si taglierebbero; e quindi (405) la distanza de' centri sarebbe minore della somma de'raggi, e maggiore della loro differenza contro la supposizione. Dunque le due circonferenze si toccano. Il che bisognava dimostrare.

* 412. *Scolio*. Riassumendo il fin qui detto si conchiude, che due circonferenze possono avere tre punti di comune, e si confondono in una sola; due punti di comune, e si segano; un sol punto di comune, e si toccano; finalmente nessun punto di comune, ed allora sono intieramente separate, ed una è fuori dell'altra, o una dentro l'altra.

La situazione rispettiva di due circonferenze che non si confondono dipende dalla distanza de'loro centri; essa è minore della somma de'raggi e maggiore della loro differenza nel caso dell'intersezione; eguaglia quella somma o quella differenza nel caso del contatto esterno o interno; e quando i due cerchi non si segano nè si toccano la distanza de'centri è maggiore della somma o minore della differenza de'raggi, secondo che i due cerchi sono fuori uno dell'altro o l'uno dentro l'altro. In questa ultima supposizione la distanza de'centri potrebbe anche esser nulla, ed allora i due cerchi avendo lo stesso centro diconsi *concentrici* (*).

Applicazione delle proprietà precedenti alla risoluzione di alcuni problemi.

413. *Problema I. Trovare il centro d'un cerchio o d'un arco dato* (fig. 98).

Soluzione. Si prendano sulla circonferenza o sull'arco tre punti ad arbitrio *A*, *B*, *C*, si tirino le corde *AB*, *BC*, e per i punti di mezzo di queste s'innalzino le perpendicolari *DE*, *FG*: il punto *O* del loro incontro sarà il centro richiesto (n° 372). Il che bisognava fare.

(*) Il progresso che si manifesta nella distanza de'centri, passando da una all'altra delle indicate posizioni di due cerchi, fa vedere che l'intersezione di due circonferenze può cambiarsi in contatto facendo crescere o facendo diminuire la distanza de'centri con trasportare uno di essi centri lungo la perpendicolare inalzata dal mezzo della corda che unisce i due punti d'intersezione. Nel movimento, questi due punti andranno man mano accostandosi fra loro finchè cadranno sulla linea de'centri confondendosi in un solo; la corda che li unisce si annullerà e l'intersezione de' cerchi si cambierà in contatto, analogamente a ciò che si è osservato per la secante che si cambia in tangente (n° 396). Questo passaggio dall'intersezione al contatto è la pruova più concludente della necessità di un unico punto di contatto ne'cerchi; mentre in altre curve i punti d'intersezione essendo più di due, la loro riduzione al contatto non può dare un solo punto, come ne'cerchi.

414. *Problema II. Per un punto dato condurre una tangente ad un cerchio.*

Soluzione. Se il punto dato A (fig. 92) è sulla circonferenza, si conduca il raggio AO, e su questo s'innalzi la perpendicolare BC, che sarà la tangente cercata (n° 385):

Se il punto A (fig.107) è fuori del cerchio, si unisca questo punto col centro C, e sopra CA come diametro si descriva un cerchio che taglierà il dato ne' punti D, ed E; finalmente si tirino le corde AD, AE, le quali saranno ambedue tangenti al cerchio dato.

Infatti, tirando le corde DC, CE, saranno retti gli angoli CDA, CEA, perchè ciascuno di essi è iscritto nel semicerchio. Laonde ciascuna delle rette AD, AE, sarà perpendicolare all'estremità del raggio, e però tangente al cerchio (n° 385). Il che bisognava fare.

415. *Scolio*. Le due tangenti AD, AE, sono uguali, perchè l'ipotenusa CA è comune a' due triangoli rettangoli CDA, CEA, ed il cateto $CD = CE$; e però dev' esser l'altro cateto $AD = AE$ (n° 315).

416. *Problema III. Sopra una retta data descrivere un segmento di cerchio capace di un angolo dato, vale a dire un segmento tale che gli angoli in esso iscritti sieno uguali all' angolo dato* (fig. 91).

Soluzione. Sia AB la retta data. Si faccia l'angolo ABF uguale all'angolo dato; s'innalzi BO perpendicolare a BF, e GO perpendicolare ad AB nel punto di mezzo G; il punto d'incontro O sarà il centro, ed OB il raggio del cerchio richiesto.

Infatti essendo EF tangente, l'angolo ABF avrà per misura la metà dell'arco ACB (387); ma l'angolo AMB iscritto nel segmento alterno $AMNB$ ha pure per misura la metà di quell'arco, dunque i due angoli sono uguali. Il che bisognava fare.

*417. *Problema IV Da un dato cerchio tagliare un segmento capace di un angolo dato* (fig. 91).

Sol. Sia AMB il cerchio dato. In un qualunque punto B della circonferenza di questo cerchio si tiri la tangente BF, e si faccia l'angolo ABF eguale all'angolo dato, è manifesto che il segmento $AMNB$ sarà capace dell' angolo dato, perchè l' angolo AMB, o ANB, ec. iscritto in questo segmento è uguale all'angolo ABF. Il che bisognava fare.

418. *Problema V. dividere una retta data in media ed estrema ragione, vale a dire in due parti tali che la maggiore sia media proporzionale fra la retta intera e la minore* (fig. 108).

Sol. Sia AB la retta data. S'innalzi dal punto B la perpendicolare BC eguale alla metà di AB; col centro C, e col raggio CB si descriva un cerchio, e si tiri la retta AC, che si prolunghi in E. Finalmente si prenda sopra AB una parte $AF = AD$: la retta AB sarà divisa nel punto F in media ed estrema ragione.

Infatti, essendo AB tangente, ed AE secante, si ha la proporzione (n° 395).

$$AE : AB :: AB : AD, \text{ e dividendo}$$
$$AE - AB : AB :: AB - AD : AD.$$

Ma la tangente AB è uguale al diametro DE, perchè AB è doppia del raggio BC, dunque AE—AB è lo stesso che AD o pure AF. Inoltre AB—AD è lo stesso che FB; per conseguenza la proporzione precedente diviene

$AF : AB :: FB : AF$, ed invertendo

$AB : AF :: AF : FB$; vale a dire

il segmento maggiore AF è medio proporzionale fra la linea intera AB ed il segmento minore FB. Il che bisognava fare.

* 419. *Problema VI. Costruire un rettangolo che sia equivalente ad un quadrato dato* C, *e tale che i lati adiacenti di esso rettangolo facciano una somma data* AB (fig. 109).

Soluzione. Si divida AB in due parti uguali nel punto D; indi fatto centro in D e col raggio DA si descriva il semicerchio ACB. Al punto A s' innalzi sul diametro AB la perpendicolare AG, sulla quale si prenda una parte AE uguale al lato del quadrato dato C, e dal punto E si conduca la retta EF parallela al diametro AB. Finalmente dal punto F, ove la parallela incontra la circonferenza, si abbassi sul diametro la perpendicolare FQ: dico che AQ, e QB sono i lati adiacenti del rettangolo cercato. Infatti le rette AE, e FQ sono uguali come lati opposti del rettangolo $EAQF$; di più la perpendicolare FQ è media proporzionale tra i due segmenti AQ, e QB del diametro (n° 345), dunque il rettangolo di AQ in QB è equivalente al quadrato di FQ, ovvero di AE, o in fine al quadrato dato C. Da un' altra parte la somma delle rette AQ, e QB è uguale ad AB, dunque il rettangolo di AQ in QB è il rettangolo richiesto. Il che bisognava fare.

* 420. *Scolio.* È manifesto che se AE è uguale al raggio CD, la retta EF sarà una tangente al cerchio, ed il rettangolo richiesto sarebbe $AD \times DB$, cioè un quadrato uguale al quadrato dato. Se poi AE è maggiore di CD, allora la parallela EF non incontra la circonferenza, ed il problema è impossibile. Dunque il problema è possibile quando il lato del quadrato non eccede il raggio CD, ovvero la metà della retta data AB.

* 421. *Problema VII. Trovare due rette che sieno reciprocamente proporzionali a due altre* M, e N, *e che facciano una somma data* AB (fig. 109).

Soluzione. Questo problema riducesi al precedente. Infatti tra le due rette date si trovi una media proporzionale, indi sopra AB come diametro si descriva un semicerchio, sulla tangente AG si prenda una parte AE uguale alla media proporzionale accennata, e si prosegua la costruzione come nel problema precedente: le rette AQ, e QB saranno le rette richieste. Perocchè essendo per costruzione il quadrato di FQ, o di AE uguale al rettangolo contenuto dalle rette date M, e N, ed essendo lo stesso quadrato di AE uguale al rettangolo di AQ in QB, ne segue che $AQ \times QB = M \times N$, ovvero le rette AQ, QB sono reciprocamente proporzionali alle rette M, e N, e fanno la somma data AB. Il che bisognava fare.

* 422. *Scolio.* È manifesto che con la stessa costruzione si potreb-

be *dividere una retta data* AB *in parti reciprocamente proporzionali a due rette date* M, *e* N.

*423.*Problema VIII. Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato dato* Q, *e tale che i lati adiacenti di esso rettangolo abbiano tra loro una differenza data* (fig. 108).

Soluzione. Sia *CB* la metà della differenza data. Fatto centro in *C*, e col raggio *CB* si descriva una circonferenza. All'estremità del raggio *CB* si conduca la tangente *BA*, che si faccia uguale al lato del quadrato proposto; indi si congiunga il punto *A* col centro *C*, e si prolunghi *AC* finchè incontri la circonferenza nel punto *E*. Dico che *AE*, ed *AD* sono i lati adiacenti del rettangolo richiesto. Infatti il rettangolo di *AE* in *AD* è uguale al quadrato di *AB* (n° 396) ; ed oltre a ciò la differenza delle rette *AE*, *AD* è uguale a *DE*, ossia alla differenza data, poichè *DE* essendo diametro è doppio del raggio *CB*, che è la metà della differenza data. Il che bisognava fare.

*424.*Scolio*. È evidente che questo problema è sempre possibile.

*425.*Problema IX. Trovare due rette che sieno reciprocamente proporzionali a due rette date* M, *e* N, *ed abbiano tra loro una differenza data* (fig. 108).

Soluzione. Questo problema riducesi al precedente. Infatti sia *CB* la metà della differenza data ; si descriva col centro in *C*, e col raggio *CB* una circonferenza, indi si conduca la tangente *AB*, che sia uguale ad una media proporzionale tra le due rette date *M*, e *N*: finalmente si congiunga il punto *A* col punto *C*, e si prolunghi *AC* in *E*: le rette *AE*, *AD* saranno le rette richieste. Perocchè da una parte il quadrato di *AB* è uguale al rettangolo di *AE* in *AD*, e dall'altra parte lo stesso quadrato di *AB* è uguale al rettangolo compreso dalle rette *M*, e *N*: quindi sarà $AE \times AD = M \times N$, ossia le rette *AE*, *AD* sono reciprocamente proporzionali alle due rette date *M*, e *N*.ed hanno inoltre la differenza data *DE*, poichè *DE* è doppia di *CB*. Il che bisognava fare.

CAPITOLO XIV.

DE' POLIGONI ISCRITTI E CIRCOSCRITTI AL CERCHIO

426. *Definizione* I: Un poligono dicesi *iscritto* nel cerchio, quando ciascuno de'suoi angoli ha il vertice sulla circonferenza: in tal caso il cerchio si dirà *circoscritto* al poligono.

427. *Definizione* II.Un poligono è *circoscitto* il cerchio,se ciascuno dei suoi lati è tangente alla circonferenza ; ed allora il cerchio si dirà *iscritto* al poligono.

428. La teorica, che andiamo ad esporre, appartiene specialmente alla iscrizione e circoscrizione de'poligoni regolari al cerchio ; e però giova ricordarsi che dicesi regolare (n° 139) un poligono , quando è equilatero ed equiangolo.

Vi sono poligoni regolari di ogni numero di lati. Il triangolo equilatero è quello di tre lati, ed il quadrato quello di quattro.

PROPOSIZIONE CXL — *TEOREMA*.

429. *In ogni triangolo può iscriversi e ad ogni triangolo può circoscriversi un cerchio* (fig. 110).

Dim. Sia ABC un triangolo qualunque; si divida per mezzo l'angolo A con la retta AO (n° 101), e l'angolo B colla retta BO, e dal punto d'incontro O delle due rette si abbassi la perpendicolare OF sul lato AC; indi col centro in O, e col raggio OF si descriva un cerchio: dico che questo sarà iscritto al triangolo.

Infatti, si conduca OD perpendicolare ad AB, ed OE a BC. Nei triangoli AOF ADO gli angoli in F, e D sono retti, l'angolo DAO $= OAF$ per costruzione, ed il lato AO è comune, perciò saranno uguali i due triangoli, (n° 88), e si avrà $OF = OD$. Nello stesso modo si dimostra che $OD = OE$; e quindi il cerchio è iscritto al triangolo,

La seconda parte della proposizione è evidente, dappoichè per tre punti A, B, C non in linea retta, può sempre passare una circonferenza. Il che bisognava dimostrare.

430. *Scolio*. È facile vedere che le tre rette OA, OB, OC che dividono per mezzo i tre angoli di un triangolo concorrono in un medesimo punto.

PROPOSIZIONE CXLI — *TEOREMA*.

431. *Ad ogni poligono regolare può essere iscritto c circoscritto un cerchio* (fig. 112).

Dim. Sia ABE un poligono regolare; se per i punti I, e K di mezzo de'lati AB, BC si conducono su questi lati le perpendicolari IO, KO, il punto d'incontro O sarà il centro del cerchio che passa per i tre punti A, B, C (n° 399); dico ora che questo cerchio passerà ancora pel punto D, vale a dire che $OD = OC$. Infatti i triangoli isosceli AOB, OBC sono uguali perchè hanno i tre lati respettivamente uguali; dunque l'angolo $OBA = OBC$, e la retta BO divide l'angolo B in due parti uguali, ma l'angolo $OBC = OCB$, ed è poi l'angolo $B = C$, dunque OC divide l'angolo C per mezzo, e quindi risulteranno uguali i triangoli OCB, OCD avendo un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali. Laonde si avrà $OD = OC$, e nello stesso modo si dimostrerà che $OD = OE = OF$.

Rimane a dimostrare che il cerchio descritto col centro in O e col raggio OI è iscritto al poligono ABE; ma ciò è manifesto essendo le corde uguali AB, BC, CD, ec. equidistanti dal centro. Il che bisognava dimostrare.

432. *Scolio. I.* Il punto O, centro comune del cerchio iscritto e del cerchio circoscritto si considera ancora come *centro del poligono regolare*; e per questa ragione gli angoli AOB, BOC, COD, ec. diconsi *angoli al centro del poligono*. È manifesto che tutti gli an-

goli al centro d'un poligono regolare sono uguali fra loro, e che il valore di ciascuno di essi si ottiene dividendo la somma di tutti gli angoli al centro, ossia quattro retti, pel numero de'lati del poligono.

433. *Scolio II.* Si noti ancora che *se si divida la circonferenza in un numero qualunque di parti uguali* AB, BC, CD, *ec.* (fig. 112), *e si uniscano i punti di divisione* A, B, C, *ec.*: *con altrettante corde, il poligono iscritto* ABCDEF *sarà un poligono regolare.*

Infatti, essendo uguali gli archi *AB, BC, CD,* ec. saranno uguali le corde *AB, BC, CD,* ecc., come pure gli angoli *ABC,BCD, CDE* ec., perchè iscritti in uguali segmenti.

Se dunque si sapesse dividere la circonferenza in quel numero di parti uguali che si vuole, si potrebbe *iscrivere in un cerchio dato qualunque poligono regolare.* Ora questo problema non ammette soluzione generale, appunto perchè con la riga ed il compasso non si può dividere la circonferenza in qualsivoglia numero di parti uguali. Ne'seguenti problemi vedremo quali sono i poligoni regolari che si possono iscrivere in un cerchio dato, e per conseguenza circoscrivere; essendo queste due cose, come si vedrà, intimamente connesse fra loro.

PROPOSIZIONE CXLII — *PROBLEMA.*

434. *Iscrivere un quadrato in un cerchio dato* (fig. 113).

Soluzione. Si conducano due diametri *AC, BD* che si taglino ad angoli retti, e si uniscano le estremità *A, B, C, D* colle corde *AB, BC, CD, DA*; la figura *ABCD* sarà il quadrato iscritto, perchè essendo uguali gli angoli al centro, gli archi *AB, AC* ec. risultano uguali, e però il poligono sarà regolare (n° 433). Il che bisognava fare.

435. *Scolio.* Il triangolo *ABO* essendo rettangolo ed isoscele, ne risulta che il quadrato di *AB* è doppio del quadrato di *AO*. Quindi si avrà $\overline{AB}^2 : \overline{BO}^2 :: 2 : 1$, ovvero $AB : AO :: \sqrt{2} : 1$, vale a dire che *il lato del quadrato iscritto sta al raggio come la radice quadrata di 2 sta all'unità.*

Applicando lo stesso ragionamento al triangolo rettangolo ed isoscele *BDA* si troverà che la diagonale *BD* del quadrato sta al lato *AB* come $\sqrt{2} : 1$, onde queste due linee sono incommensurabili; il che era stato dimostrato in altro modo (n° 205).

PROPOSIZIONE CXLIII — *PROBLEMA.*

436. *Iscrivere un esagono regolare ed un triangolo equilatero in un cerchio dato* (fig. 114).

Soluzione. Supponiamo il problema risoluto, e sia *AB* un lato dell'esagono iscritto; se si tirino i raggi *OA, OB,* dico che il triangolo *AOB* è equilatero. Imperochè, essendo per ipotesi l'arco *AB*

sesta parte della circonferenza, sarà l'angolo al centro AOB sesta parte di quattro retti, o terza di due retti: per conseguenza gli angoli A, B del triangolo isoscele AOB equivalgono insieme a due terze parti di due retti, e però ciascuno di essi è la terza parte di due retti. Laonde il triangolo AOB è equiangolo, e quindi equilatero. Dunque il lato dell'esagono iscritto è uguale al raggio. Dal che ne segue che portando il raggio sei volte sulla circonferenza si avrà il poligono cercato.

Se ora si conducano le rette AC, CE, EA, il triangolo iscritto che ne risulta sarà equilatero, dappoichè le rette accennate sono le corde degli archi uguali ABC, CDE, EFA. Il che bisognava fare.

437. *Scolio*. La figura $ABCO$ essendo una losanga, sarà (n° 340) il quadruplo quadrato di AB eguale alla somma dei quadrati di AC, e di BO; ma $AB = 1$, dunque il quadrato di AC sarà triplo del quadrato di AB. Laonde se $AB = 1$, si avrà $AC = \sqrt{3}$, vale a dire che

Il lato del triangolo equilatero iscritto sta al raggio come la radice quadrata di 3 sta all'unità.

PROPOSIZIONE CXLIV — *PROBLEMA*.

438. *Iscrivere in un cerchio dato un decagono, ed un pentagono regolare* (fig. 115).

Soluzione. 1°. Si divida il raggio AO in media ed estrema ragione nel punto M (n° 418); indi col centro in A e con un raggio $= MO$, ossia al segmento maggiore, si descriva un arco che tagli la circonferenza nel punto B, la corda AB sarà il lato del decagono richiesto. Infatti, si conduca il raggio OB, e la retta BM. E poichè per costruzione $AO : OM :: OM : MA$, ed è $MO = AB$, si avrà $AO : AB :: AB : MA$, e quindi il triangolo ABO sarà simile (n° 302) al triangolo AMB; ma il primo è isoscele, dunque lo è ancora il secondo, e sarà $AB = BM = MO$, e per conseguenza il triangolo BMO risulterà pure isoscele. Laonde l'angolo AMB esterno al triangolo MOB sarà doppio dell'angolo O: ma l'angolo $AMB = MAB = ABO$; dunque il triangolo isoscele AOB è tale che ciascuno de' suoi angoli alla base è doppio dell'angolo al vertice, il quale sarà perciò la quinta parte di due retti, o la decima parte di quattro retti. Dunque l'arco AB è la decima parte della circonferenza, e la corda AB è il lato del decagono regolare iscritto.

2°. Unendo di due in due i vertici del decagono regolare iscritto, si avrà evidentemente il pentagono regolare iscritto. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE CXLV — *PROBLEMA*.

439. *Iscrivere in un cerchio dato un pentedecagono regolare* (fig. 115).

Soluzione. Si adatti nel cerchio una corda AL uguale al lato dell'esagono, e, partendo dallo stesso punto A la corda AB uguale come qui sopra al lato del decagono, la corda dell'arco BL sarà il lato del pentedecagono regolare richiesto.

Infatti, essendo l'arco AL la sesta parte, o $\frac{5}{30}$ della circonferenza e l'arco AB la decima parte, o $\frac{3}{30}$ della circonferenza medesima, l'arco BL, differenza de'due archi accennati, sarà $\frac{2}{30}$, ovvero $\frac{1}{15}$ della circonferenza; e per conseguenza la corda BL sarà il lato del pentedecagono regolare. Il che bisognava fare.

440. *Scolio I.* Un poligono regolare essendo iscritto al cerchio, se si dividono gli archi sottesi dai suoi lati in due parti uguali, e si conducano le corde delle metà degli archi, si avrà un poligono regolare iscritto di un numero doppio di lati.

Laonde il quadrato può servire ad iscrivere successivamente i poligoni regolari di 8, 16, 32, ec. lati: il decagono quelli di 20, 40, 80, ec. lati; il pentedecagono quelli di 30, 60, 120, ec. lati.

441. *Scolio II.* Sia BC (fig. 120), un lato di un poligono regolare iscritto. Se si divida l'arco BDC in due parti uguali, e dal punto di mezzo D si tirino le corde DB, DC, la somma di queste due corde sarà maggiore della corda BC. Parimente se si divida l'arco BD per mezzo nel punto E, e l'arco DC anche per mezzo nel punto O, e si tirino le corde BE, DE, DO, CO, la somma di queste quattro corde sarà maggiore della somma delle due BD, CD. Dividendo ciascuno degli archi BE, DE, DO, CO in due parti eguali, e tirando le corde, la somma delle otto corde, che ne risultano, sarà maggiore di quella delle quattro precedenti, e con più ragione di quella delle due BD, CD. Dicasi lo stesso della somma di 16, 32, 64. ecc., corde indefinitamente; e però

I lati dei poligoni regolari iscritti vanno sempre diminuendo, ed al contrario le loro somme, ossiano i perimetri dei poligoni, vanno sempre crescendo ed accostandosi alla circonferenza del cerchio.

PROPOSIZIONE CXLVI — *TEOREMA*

* 442. *Il quadrato del lato del pentagono regolare iscritto è uguale al quadrato del raggio più il quadrato del lato del decagono regolare iscritto nel medesimo cerchio* (fig. 116).

Dim. Sia $ABCDE$ il pentagono regolare iscritto. L'angolo al centro BOA è $\frac{4}{5}$ di un retto (n° 432) per conseguenza ciascuno degli angoli OAB, OBA è $\frac{3}{5}$ di un retto. Ora, se si divida l'arco BFA in due parti uguali, ciascuna delle corde BF, FA sarà un lato del decagono, e l'angolo al centro AOF sarà $\frac{2}{5}$ di un retto. Ciò premesso, si divida l' arco FA per mezzo nel punto G, e si conducano le rette OG, FM; le rette MA, MF, saranno eguali come oblique equidistanti dalla perpendicolare OG, e però il triangolo FAM sarà isoscele, e simile al triangolo isoscele AFB col quale ha l'angolo A di comune, quindi si avrà la proporzione $AM : AF :: AF : AB$,

dalla quale si deduce (n° 218) che il quadrato di AF è uguale al rettangolo di AB in AM.

Parimente il triangolo BOM, di cui due angoli OBM, BOM valgono ciascuno $\frac{2}{5}$ di un retto, è isoscele e perciò simile al triangolo isoscele BOA col quale ha di comune l'angolo B, onde si ha la proporzione $MB : BO :: BO : AB$, da cui si ricava (n° 218) che il quadrato di BO è uguale al rettangolo di AB in MB. Or si è dimostrato (n° 327) che il quadrato di AB è uguale alla somma de'due rettangoli di AB in AM, e di AB in MB, dunque il quadrato di AB è uguale alla somma de'due quadrati di AF, e di OB. Il che bisognava dimostrare.

*443. *Scolio.* È facile ora determinare il lato del quadrato, del triangolo equilatero, del decagono, e del pentagono, essendo dato il raggio AB (fig. 117) del cerchio, in cui quei poligoni devono essere iscritti. Infatti, se AB rappresenta il raggio del cerchio, s'innalzi ad esso la perpendicolare $BC = AB$, e si tiri AC; sarà questo il lato del quadrato. Sopra AC si alzi la perpendicolare $DC = AB$, e si conduca DA, sarà questo il lato del triangolo equilatero iscritto, dappoichè il quadrato di AD risulta triplo del quadrato del raggio AB. Finalmente si divida il raggio AB in media ed estrema ragione nel punto E, e sia EB il segmento maggiore; questo sarà il lato del decagono, e la congiungente CE sarà il lato del pentagono.

PROPOSIZIONE CXLVII — *TEOREMA*.

444. *Essendo iscritto in un cerchio un poligono regolare, si può sempre circoscrivere al cerchio medesimo un poligono simile* (fig. 113).

Dim. Sia abd il poligono iscritto; si dividano gli archi ab, bc ecc. ciascuno in due parti uguali ne' punti m, n, k, l, r, e per questi punti si tirino le tangenti AB, BC, CD, ecc.; dico che il poligono ABD formato dall'incontro di queste tangenti è simile ad abd.

Infatti, essendo uguali gli archi mr, mn, nk, ecc., le loro corde sono pure uguali, per conseguenza saranno uguali i triangoli rAm, mBn, nCk, ecc., che hanno queste corde uguali per basi, e gli angoli adiacenti uguali, perchè ciascuno di essi è formato da una tangente e da una corda, ed ha per misura la metà di un arco uguale all'arco mr (n° 387). Da questi triangoli isosceli ed uguali si ricava subito che le tangenti AB, BC, CD, ec. sono tutte uguali fra loro, come pure gli angoli A, B; C, ec.; e però il poligono circoscritto sarà regolare e simile all'iscritto (n° 323). Il che bisognava dimostrare.

445. *Corollario.* Se è dato il poligono circoscritto ABD, tirando le corde mr, mn, nk, ecc., il poligono iscritto che ne risulta sarà simile al circoscritto. Parimente è facile vedere che se si dividono per metà gli archi mr, mn, nk, ecc., e si congiungono i punti di

mezzo a, b, c, ecc., il poligono abd che ne nasce è anche simile ad ABD.

446. *Scolio.* Se si considerino le tangenti AB, AC (fig. 120) che sono metà di lati del poligono circoscritto corrispondente allo iscritto che ha per lato BC, sarà $AB + AC > BC$; e per conseguenza si vede primieramente che il lato del poligono circoscritto è maggiore del lato del corrispondente poligono iscritto. Per passare al poligono circoscritto di un doppio numero di lati, basterà condurre la tangente MN; e poichè si ha $MN < AM + AN$, la somma delle quattro tangenti BM, MD, DN, NC, che equivalgono a due lati del poligono circoscritto, sarà minore della somma delle due tangenti BA, AC, ossia del lato del poligono precedente. Sono poi le quattro tangenti indicate maggiori delle due corde BD, DC, cioè la somma di due lati del poligono circoscritto è maggiore di quella di due lati del corrispondente poligono iscritto. Continuando allo stesso modo, alle quattro corde BE, DE, DO, CO, corrisponderanno otto tangenti, ossiano quattro lati del correlativo poligono circoscritto; e la somma di quelle otto tangenti sarà minore della somma delle quattro precedenti, e con più ragione delle due AB, AC, mentre sarà maggiore della somma delle quattro corde corrispondenti. Dunque raddoppiando successivamente il numero delle tangenti e delle corde, e tenendo presente ciò che si è dimostrato (n° 441) rispetto ai poligoni iscritti si potrà stabilire.

1.° *I lati dei poligoni iscritti e circoscritti divengono sempre più piccoli.*

2.° *I perimetri de' poligoni iscritti vanno sempre crescendo, e quelli de' circoscritti sempre diminuendo.*

3.° *I perimetri de' poligoni iscritti, e quelli de' poligoni circoscritti si avvicinano sempre fra loro per valore e per posizione, e gli uni e gli altri si accostano pure alla circonferenza intermedia del cerchio.*

PROPOSIZIONE CXLVIII — *TEOREMA.*

447. *L'aja di un poligono regolare ha per misura il prodotto del suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto* (fig. 112).

Dim. Imperocchè, se dal centro O del poligono regolare ABE si conducano a tutti i vertici di esso le rette OA, OB, OC, ec., si dividerà questo poligono in tanti triangoli isosceli uguali, quanti sono i suoi lati. Ma l'aja di uno di questi triangoli AOB ha per misura la sua base AB moltiplicata per la metà della sua altezza OI, raggio del cerchio iscritto nel poligono; dunque l'aja di quest'ultimo avrà per misura la somma delle basi de' triangoli, cioè il suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto. Il che bisognava dimostrare.

448. *Scolio.* Si noti che il raggio OI del cerchio iscritto prende ancora il nome di *apotema del poligono regolare*; e che il raggio

OA del cerchio circoscritto si chiama talvolta *raggio del poligono regolare.*

PROPOSIZIONE CXLIX — *TEOREMA.*

449. *I perimetri de' poligoni regolari d'un medesimo numero di lati stanno come i raggi de' cerchi iscritti e circoscritti; e le loro aje come i quadrati di questi medesimi raggi* (fig. 111).

Dim. Sieno ABD, abd due poligoni regolari dello stesso numero di lati; e sieno AO, ao, i raggi de' cerchi circoscritti, ed OH, oh quelli de' cerchi iscritti.

Essendo l'angolo $A = a$, le loro metà, cioè gli angoli OAH, oah saranno uguali; e perciò risulteranno simili i due triangoli rettangoli OAH; oah, onde si avrà.

$$AH : ah :: AO : ao :: OH : oh.$$

ed elevando a quadrato i termini di queste proporzioni sarà pure

$$\overline{AH}^2 : \overline{ah}^2 :: \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2 :: \overline{OH}^2 : \overline{oh}^2$$

Ma i perimetri de' poligoni simili ABD, abd stanno come i lati AB, ab, o come le loro metà AH, ah; e le aje degli stessi poligoni stanno come i quadrati di questi medesimi lati, o delle loro metà; dunque la proposizione enunciata diviene manifesta. Il che bisognava dimostrare.

CAPITOLO XV.

DELLA MISURA DEL CERCHIO.

450. La trasformazione di un poligono in un triangolo equivalente (n° 290) e quella di un triangolo in un quadrato (348) equivalente ci ha dato il mezzo di ottenere la *quadratura* di un poligono qualunque. Rimane ora a vedere se si può trasformare il cerchio in un triangolo, e quindi in un quadrato equivalente; dappoicchè senza questa trasformazione sarebbe impossibile ottenerne la misura.

PROPOSIZIONE CL — *LEMMA.*

451. *La circonferenza del cerchio si può considerare come il perimetro di un poligono regolare di un numero infinito di lati* (fig. 120).

Dim. Cia $BCLI$ la circonferenza di un cerchio; e dinoti la corda BC il lato di un poligono regolare iscritto, e le tangenti AB, AC siano le metà di due lati del corrispondente poligono circoscritto. Si è dimostrato (n° 446) che raddoppiando successivamente il numero de' lati de' poligoni iscritti e circoscritti, essi lati divengono sempre più piccoli, ed i perimetri de' poligoni si avvicinano sempre

fra loro ed alla circonferenza intermedia del cerchio. Or dico che la lunghezza de' lati acrennati, a forza di raddoppiarne il numero, deve diminuire al di sotto di qualunque lunghezza data.

Infatti, se un lato qualunque BD, MN di poligono iscritto o circoscritto non potesse diminuire al di sotto di una certa parte K del diametro BL, siccome il numero de' lati di tali poligoni si può accrescere indefinitamente, così la lunghezza K si troverebbe moltiplicata per un numero tanto grande quanto si vuole, e per conseguenza il prodotto che ne risulterebbe, cioè il perimetro del poligono circoscritto, o del poligono iscritto, sarebbe maggiore di qualunque grandezza data, il che è assurdo; perocchè si è dimostrato (n° 446) che il perimetro del poligono circoscritto è sempre minore del perimetro del poligono i cui lati sono doppi di AB, BC, ed il perimetro del poligono iscritto è sempre minore di quello del circoscritto corrispondente.

Dunque le lunghezze de' lati de' poligoni iscritti e circoscritti non possono nella loro progressiva diminuzione avere un *limite finito*, ma debbono divenire *infinitamente piccole*, cioè debbono diminuire al di sotto di qualunque lunghezza data; e quindi i perimetri de' poligoni iscritti e circoscritti dovranno avere per limite una linea curva, perchè solo in una linea di tal natura non si distinguono elementi finiti rettilinei (n° 13). E poichè i perimetri de poligoni regolari iscritti nel continuo loro incremento non possono uscir fuori della circonferenza del cerchio, e viceversa i perimetri de' poligoni circoscritti nella loro progressiva diminuzione non possono penetrare dentro del cerchio medesimo; ne segue evidentemente che la circonferenza del cerchio è la linea curva limite comune degli uni e degli altri perimetri; e però la circonferenza del cerchio si può considerare come il perimetro di un poligono regolare di lati infinitamente piccoli, o ciò che vale lo stesso, come il perimetro di un poligono regolare di un numero infinito di lati. Il che bisognava dimostrare.

452. *Corollario* I. Poichè la circonferenza del cerchio è il massimo fra tutti i perimetri de' poligoni regolari iscritti, ed il minimo fra tutti i perimetri dei poligoni circoscritti, si può ora conchiudere che

La circonferenza del cerchio è maggiore del perimetro di ogni poligono regolare iscritto, e minore del perimetro di qualunque poligono regolare circoscritto (*).

(*) Archimede stabilisce per principio geometrico che di due linee o curve o composte di rette, le quali terminano agli stessi punti e rivolgono la concavità dalla medesima parte, è maggiore quella che comprende l'altra dentro di se. Applicando questo principio al cerchio ed ai poligoni regolari iscritti e circoscritti, ne segue che l'arco BDC (fig. 120) è maggiore della somma delle corde BD, DC, e minore di quella delle tangenti AB, AC; e per conseguenza la circonferenza del cerchio $BCLI$ è maggiore del perimetro di ogni poligono regolare iscritto, e minore del perimetro di ogni poligono regolare circoscritto. Or tutte le dimostrazioni fatte di quel princi-

*453. *Corollario* II. Apparisce ancora da questo teorema che raddoppiando indefinitamente il numero de' lati de' poligoni regolari iscritti e circoscritti, si può iscrivere e circoscrivere al cerchio un poligono regolare che differisca dal cerchio medesimo di una quantità minore di qualunque assegnabile.

PROPOSIZIONE CLI — *TEOREMA*.

454. *Il cerchio ha per misura il prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio* (fig. 118).

Dim. Sia il cerchio *abc*. Dico che ha per misura il prodotto della sua circonferenza *mnkr* per la metà del raggio *Om*.

Infatti, il poligono regolare *ABCDE* circoscritto al cerchio ha per misura il perimetro per la metà del raggio *Om* (n° 447). Ma la circonferenza *mnkr* può considerarsi come il perimetro di un poligono regolare di un numero infinito di lati (n° 451), dunque il cerchio *abc* deve aver per misura il prodotto della sua cironferenza per la metà del raggio. Il che bisognava dimostrare.

455. *Corollario*. Poichè il triangolo ha per misura il prodotto della base per la metà dell'altezza ne segue che

Il cerchio è equivalente ad un triangolo rettangolo SPQ, *di cui un cateto rappresenta la circonferenza, e l'altro il raggio.*

Altra Dimostrazione.

*456. Se è possibile, sia il cerchio *mkl* (fig. 118) maggiore del triangolo *E*. S'iscriva in questo cerchio un poligono regolare *abcd* che differisca dal cerchio medesimo di una quantità minore dell'eccesso del cerchio sul triangolo (n° 453) : un tal poligono sarà esso pure maggiore del triangolo. Ora, l'apotema *Ox* è minore del raggio *Om*, ed il perimetro *abcde* è minore della circonferenza (n° 452) ; e però l'aja del poligono, che risulta dal prodotto di due fattori più piccoli di quelli del triangolo (n° 447), è minore dell'aja del triangolo (n° 275) : ma doveva esser maggiore, dunque il cerchio non può esser maggiore del triangolo.

Supponiamo in secondo luogo che il cerchio sia minore del triangolo. In questa ipotesi ; si circoscriva un poligono *ABCD* che differisca dal cerchio di una quantità minore dell'eccesso del triangolo

---

pio si riducono in fine a quella fatta qui sopra (n° 451); e però risulta manifesto che il principio di Archimede applicato al cerchio ed ai poligoni regolari iscritti e circoscritti, è fondato, o piuttosto si confonde con l'altro, che la circonferenza del cerchio può considerarsi come un poligono regolare di un numero infinito di lati. Quindi un siffatto principio non serve ad altro se non a mascherare la considerazione dell' infinito, senza poterla escludere *effettivamente* essendo inerente alla natura del soggetto, cioè al passaggio dalle linee rette alle curve.

sul cerchio ; il poligono dovrebbe essere ancor esso minore del triangolo, il che non può sussistere ; dappoichè l'apotema *Om* è uguale al raggio , ed il perimetro è maggiore della circonferenza (n° 452), per cui l'aja del poligono *ABCD* deve essere necessariamente maggiore di quella del triangolo. Dunque il cerchio non può essere nè minore nè maggiore del triangolo , ma dovrà essergli equivalente. Il che bisognava dimostrare (*).

457. *Scolio*. Se dunque si sapesse *rettificare* la circonferenza, cioè trovare una retta uguale alla circonferenza di un cerchio dato, si potrebbe trasformare il cerchio in un quadrato equivalente. Vedremo in appresso che la rettificazione della circonferenza non si può ottenere che per approssimazione ; e per conseguenza il famoso problema della *quadratura del circolo* non si può risolvere rigorosamente.

PROPOSIZIONE CLII — *TEOREMA*.

458. *Le circonferenze de' cerchi stanno fra loro come i raggi , ed i cerchi come i quadrati de'medesimi raggi* (fig. 111).

Dim. Infatti, i perimetri de'poligoni regolari *ABCDE*, *abcde* di un medesimo numero di lati stanno fra loro come i raggi *OB* , *ob* de' cerchi *ABD*, *abd* (n° 449), e le loro aje come i quadrati de'medesimi raggi. Ma le circonferenze di questi cerchi si possono considerare come perimetri di poligoni regolari di un numero infinito di lati (n°451), dunque le circonferenze de'cerchi stanno fra loro come i raggi, ed i cerchi come i quadrati degli stessi raggi. Il che bisognava dimostrare (**).

* 459. *Corollario*. Apparisce da questo teorema che se si descrivono tre semicerchi con i tre lati di un triangolo rettangolo *ACB* (fig, 119) presi per diametri, questi semicerchi staranno fra loro come i quadrati di questi tre lati. Ma il quadrato fatto sull'ipotenusa *AB* è uguale alla somma de'quadrati de'cateti *AC*, *BC*, dunque il se-

---

(*) Questa dimostrazione appartiene ad Archimede, che fu primo a dare la misura del cerchio. Essa è fatta col *metodo di esaustione*, il solo adoperato dagli antichi geometri per mancanza de'mezzi che ora possediamo.

(**) È facile vedere che questo teorema avrebbe potuto dimostrarsi col metodo di esaustione, cioè con la riduzione all'assurdo, di cui abbiamo dato una idea sufficiente riportando nel n° 456 la genuina dimostrazione di Archimede intorno alla misura del cerchio. Ma dalle considerazioni fatte nella nota al n° 452 apparisce chiaro che il pesante giro del metodo di esaustione non fa che rendere difficili le dimostrazioni senza nulla aggiungere al rigore, perchè ha bisogno del principio di Archimede, il quale come vedemmo si confonde, in quanto al cerchio, con l'altro, che la circonferenza si può considerare come il perimetro di un poligono regolare di un numero infinito di lati. E lo stesso deve dirsi delle dimostrazioni fatte col così detto *metodo dei limiti*, il quale non è che il metodo di esaustione semplificato , perchè quello non ha bisogno della riduzione all'assurdo, ma ha bisogno però del principio di Archimede.

micerchio ACB è uguale alla somma de'due altri ADC,BFC; e però se si tolgono di comune i segmenti AEC, BGC, sarà il triangolo ACB equivalente alla somma de'due spazj curvilinei $ADCE$, $CFBG$, che si chiamano *Lunule d'Ippocrate*, perchè Ippocrate di Chio fu primo a conoscere la proprietà, di cui è parola.

PROPOSIZIONE CLIII — *TEOREMA*.

460. *Il settore ha per misura il prodotto del suo arco per la metà del raggio* (fig. 121).

Dim. Col ragionamento fatto nel (n° 378) si può dimostrare che in un medesimo cerchio, o in cerchi uguali, il settore $AOBM$ sta al settore $EODN$ come l'arco AMB all'arco END. Ora, se l'arco END è un quadrante, il settore $EODN$ sarà la quarta parte del cerchio; per conseguenza il settore $AOBM$ sta a 4 volte il settore $EODN$, ovvero al cerchio intero, come l'arco AMB a 4 volte l'arco END, ossia alla circonferenza. Si ha dunque la proporzione *Settore: cerchio* :: *arc*. AMB : *circonferenza*, dalla quale, moltiplicando i termini della seconda ragione per la metà del raggio AO, risulta, *settore*: *cerchio* :: *arc* $AMB \times \frac{1}{2} AO$: *circonf*.$\times \frac{1}{2} AO$: e poichè i due conseguenti sono uguali, saranno uguali anche gli antecedenti; onde il settore ha per misura il suo arco moltiplicato per la metà del raggio. Il che bisognava dimostrare.

461. *Definizione*. In due cerchi differenti, si chiamano *archi simili*, *settori simili*, *segmenti simili*, quelli che corrispondono ad angoli al centro uguali. Così l'angolo O (fig. 111) essendo uguale all'angolo o, l'arco AMB è simile all'arco amb, il settore $AOBM$ simile al settore $aobm$, ed il segmento ABM al segmento abm.

PROPOSIZIONE CLIV — *TEOREMA*.

462. *Gli archi simili stanno come i raggi, ed i settori simili come i quadrati di questi medesimi raggi* (fig. 111).

Dim. Sieno gli archi simili AMB, amb, ed i settori simili $AOBM$, $aobm$; sarà l'angolo O uguale all'angolo o. Ora l'angolo O sta a quattro angoli retti come l'arco AMB sta alla circonferenza intera (n° 379), ed allo stesso modo l'angolo o, ovvero O, sta a quattro retti come l'arco amb alla circonferenza: dunque gli archi AMB, amb stanno come le circonferenze di cui fan parte, ovvero come i raggi AO, ao. Per la medesima ragione i settori stanno come i cerchi, ossia come i quadrati dei raggi AO, ao. Il che bisognava dimostrare.

Della rettificazione della circonferenza e degli archi del cerchio.

463. Se si dinotano con C e C' due circonferenze, e con R e R' i loro raggi, i diametri saranno $2R$, e $2R'$, ed in virtù del teorema (n° 458), si avrà $C : C' :: 2R : 2R'$, e permutando $C : 2R :: C' : 2R'$, ovvero (n° 190).

$$\frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'}$$

Quindi apparisce che

Il rapporto di una circonferenza al suo diametro è costante, ossia è lo stesso per qualunque cerchio. E però se questa quantità costante fosse determinata, si avrebbe la rettificazione della circonferenza di un cerchio dato moltiplicando il suo diametro per la suddetta quantità costante.

Si rappresenta comunemente con la lettera greca π il rapporto della circonferenza al diametro. Laonde moltiplicando π per $2R$, il prodotto $2\pi R$ rappresenterà la circonferenza del cerchio, il cui raggio è R, poichè essendo $\pi=\frac{C}{2R}$, si ha $2\pi R = C$. In conseguenza di ciò, se si moltiplicherà la circonferenza $2\pi R$ per la metà del raggio, il prodotto πR^2 dinoterà il cerchio che ha R per raggio, vale a dire che

Il cerchio è equivalente al quadrato del suo raggio moltiplicato per π; e la circonferenza al doppio del raggio moltiplicato per lo stesso numero.

Se dunque si potesse assegnare il valore esatto di π, si avrebbe la rettificazione della circonferenza, e quindi la quadratura esatta del circolo: ma ciò non può ottenersi essendo stato dimostrato dal sommo geometra tedesco Lambert che il rapporto della circonferenza al diametro è incommensurabile. Adunque non si può ottenere il valore di π che per approssimazione. Archimede fu primo ad occuparsi di una così importante ricerca, ed assegnò per valore approssimativo di π la frazione $\frac{22}{7}$; vale a dire che posto il diametro uguale a 7, la circonferenza sarà approssimativamente uguale a 22. Questa apppròssimazione basta in quasi tutte le applicazioni della geometria alle arti. Un rapporto assai più approssimativo di qnello di Archimede è dovuto ad Adriano Mezio geometra Olandese, che trovò $\pi=\frac{355}{113}$. Finalmente si è avuta la pazienza di spingere l' appossimazione fino a 140 cifre decimali, delle quali le prime dieci sono

$$\pi = 3,1415926535.$$

Una tale approssimazione basta per le applicazioni le più delicate della geometria ai problemi di Astronomia, di Meccanica, ecc... Laonde la quadratura esatta del circolo non avrebbe alcun vantaggio reale sulla quadratura approssimativa, di cui parliamo. Passeremo ora ad esporre uno de' procedimenti più elementari, coi quali si è giunto a trovare il valore approssimativo di π.

PROPOSIZIONE CLV — *LEMMA*.

464. ***Essendo dati i raggi* r *ed* R *de'cerchi iscritto e circoscritto ad un poligono regolare, trovare i raggi* r' *ed* R' *dei cerchi iscritto e circoscritto ad un poligono regolare*** isoperimetro, *cioè di equivalente perimetro, ma di un doppio numero di lati* (fig. 122).

Soluzione. Sia AC il lato del poligono dato, O il suo centro, B il punto di mezzo di AC; si avrà $OB = r$, ed $OA = R$. Si prolunghi OB finchè sia $OD = OA$, e si tirino le rette DA, DC. Il triangolo AOD essendo isoscele, sarà l'angolo $OAD = ODA$, per conseguenza l'angolo esterno AOB è doppio dell'angolo interno opposto ODA: similmente si dimostra che l'angolo BOC è doppio dell'angolo ODC, per cui l'angolo AOC sarà doppio di ADC. Di qui si deduce che l'angolo ADC equivale all'angolo al centro di un poligono regolare che ha un numero di lati doppio di quello del poligono proposto.

Ciò premesso, dal punto O si abbassi sopra AD la perpendicolare OI, che dividerà AD per mezzo nel punto I, perchè il triangolo AOD è isoscele. Ora conducendo IH parallela ad AC si ha $IH : AC :: ID : AD$; dunque IH è metà di AC; e quindi IH è il lato di un poligono regolare isoperimetro al poligono proposto e di un doppio numero di lati. E di più, si potrà considerare il punto D come il centro di questo poligono, in cui si avrà $DM = r'$, e $DI = R'$.

Ora per la simiglianza de'triangoli IMD, ABD si ha $DM : DB :: DI : DA$; dunque DM è metà di DB; e poichè $BD = BO + OD$, ed $OD = OA$, si avrà

$$r' = \frac{r + R}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

vale a dire che il raggio r' è medio proporzionale aritmetico fra i raggi r ed R (*).

Inoltre nel triangolo rettangolo OID essendosi abbassata dal vertice dell'angolo retto la perpendicolare IM sulla ipotenusa, sarà DI media proporzionale geometrica fra DO, DM, ovvero fra AO e DM. Quindi si avrà

$$R' = \sqrt{r' \times R} \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Ed ecco trovati i raggi de'cerchi iscritto e circoscritto al poligono isoperimetro al proposto e di un doppio numero di lati. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE CLVI — *PROBLEMA*.

465. *Assegnare il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro* (fig. 112).

(*) In quanto alla proporzione Aritmetica vedi i trattati di questa scienza.

Soluzione. Giusta il principio di Archimede (n° 452), la circonferenza del cerchio circoscritto ad un poligono regolare è maggiore del perimetro del poligono medesimo, mentre la circonferenza del cerchio iscritto è minore di quello stesso perimetro. Quindi risulta manifesto che la circonferenza, la quale fosse uguale al suddetto perimetro, dovrebb'essere compresa fra le due circonferenze summentovate; e poichè le circonferenze stanno come i raggi, si conchiuderà che il raggio di questa terza circonferenza dev'essere compreso fra i raggi de'cerchi iscritto e circoscritto al poligono.

Ciò premesso, si prenda per punto di partenza un quadrato (fig. 123), di cui un lato AC sia uguale a 2; il perimetro sarà 8; e si vuol trovare il raggio di una circonferenza di questa lunghezza, ossia della circonferenza isoperimetra. Il centro del quadrato trovasi nel punto O d'intersezione delle due diagonali; quindi il raggio del cerchio circoscritto è OA, e quello dell'iscritto è la perpendicolare OB abbassata dal centro O sul lato AC, che resta diviso per metà nel punto B. Ora essendo $OB = AB$, il raggio del cerchio iscritto sarà uguale ad 1; ed il raggio AO del cerchio circoscritto sarà uguale alla radice quadrata di 2, ossia $\sqrt{2}$, perchè il triangolo ABO è rettangolo ed isoscele (n° 315). Dunque il raggio del cerchio, di cui la circonferenza è 8, si trova compreso tra 1 e $\sqrt{2}$.

Ciò posto, se nell'espressioni (1); e (2) della proposizione precedente si ponga 1 in luogo di r, e $\sqrt{2}$ in luogo di R, si avranno i valori di r', e R', cioè de'raggi de'cerchi iscritto e circoscritto all'ottagono regolare, di cui il perimetro è 8. Se si mettono questi nuovi valori in vece di r, e R nell'espressioni citate (1), e (2), i valori che risulteranno, dinoteranno i raggi de'cerchi iscritto e circoscritto al poligono regolare di 16 lati, di cui il perimetro è 8. Proseguendo in questo modo, allorchè si sarà giunto al poligono di 4096 lati, il raggio del cerchio iscritto sarà espresso da 1,273239, e quello del circoscritto da 1,273239. Quindi si vede che per un poligono di 4096 lati, di cui il perimetro è 8, la differenza tra i raggi de'cerchi iscritto e circoscritto è minore di una unità della sesta cifra decimale. Ora essendo il lato del quadrato circoscritto ad un cerchio uguale al diametro, ne segue che la circonferenza di un cerchio qualunque è sempre minore del quadruplo del diametro, ovvero di 8 volte il suo raggio; e però se la differenza fra i raggi di due cerchi qualunque è *uno*, la differenza fra le loro circonferenze dovrà esser minore di 8. Laonde la differenza tra le circonferenze de'cerchi iscritto e circoscritto al poligono di 4096 è minore di 8 unità del sesto ordine decimale, e perciò minore di una unità del quinto ordine. Limitandoci a questa approssimazione, si può prendere il perimetro costante de'poligoni, che si è supposto uguale ad 8, per una di queste due circonfererenze, dappoichè esso è compreso fra loro, vale a dire si può prendere quel perimetro per la circonferenza di cui il raggio è 1,273239. Quindi una circonferenza uguale a 8 ha il raggio uguale ad 1,273239. Il rapporto tra

questa circonferenza ed il suo diametro ovvero il rapporto tra la semicirconferenza ed il raggio è dunque

$$\frac{4}{1,273239}\text{, ossia }\frac{4000000}{1273239}=3,14159.$$

Però limitando l'approssimazione a cinque cifre decimali si ha

$$\pi=3,\ 14159.$$

466. *Scolio*. La rettificazione degli archi di cerchio si deduce facilmente da quella della circonferenza, premettendo che la circonferanza si suole dividere da'geometri in 360 parti uguali, che si chiamano gradi, ed ogni grado in 60 minuti, ed ogni minuto in 60 secondi.

Per indicare un arco di un dato numero di gradi, minuti, e secondi, per esempio, di 48 gradi, 35 minuti, e 24 secondi, si scrive $48^\circ\ 35'\ 24''$. Ciò posto, se si dinoti con A la lunghezza d'un arco, con N il numero de'gradi, minuti, e secondi di cui si compone, e con C la lunghezza della circonferenza alla quale appartiene, si avrà evidentemente :

$$A : C :: N : 360^\circ,$$

da cui si ricava $A=\frac{C\times N}{360^\circ}$

vale a dire che per avere la lunghezza d' un arco, convien moltiplicare quella della circonferenza cui appartiene pel numero dei gradi di cui si compone, e dividere il prodotto per 360.

NOTA

al n° 330 — pag 77.

Riportiamo in questo luogo una proposizione che è una conseguenza delle proposizioni XCVII, e XCVIII. L'abbiamo tralasciata nel testo perchè non necessaria, onde non si trova più nelle moderne istituzioni di geometria, ma bisogna andare a cercarla negli *Elementi di* Euclide lib. II. prop. 8.

Il quadrato fatto sulla somma di due rette meno il quadrato fatto sulla differenza è uguale al quadruplo del rettangolo contenuto dalle rette medesime (fig. 69).

Dim. Sia AC la somma delle due rette date CO ed AO: fatta $OB = AO$ sarà BC la differenza delle rette medesime. Dico che il quadrato di AC meno il quadrato di BC è uguale al quadruplo rettangolo di OC in AO.
Sopra AC si descriva il quadrato $ACDE$, si prenda $AF = AB$, e si tiri FG parallela ad AC, e BH parallela a DC, ed OK parallela alla stessa DC. Il rettangolo $KOCG$ ha per base OC, e per altezza $OK = AF = AB = 2AO$; e per conseguenza è doppio del rettangolo di OC in AO. Ma per la proposizione 97 (pag. 76) il rettangolo $IBCG$ è uguale al rettangolo $EFIH$, ed il rettangolo $KOBI$ è uguale al rettangolo $FAOK$, perchè hanno eguali basi e la stessa altezza; dunque il rettangolo $KOCG$ è uguale alla somma de' due rettangoli $EFIH$, e $FAOK$, onde questa somma sarà eguale al doppio rettangolo di OC in AO; e però se dal quadrato $ACDE$ si toglie la figura $HIGD$, cioè il quadrato di BC, lo spazio rimanente sarà equivalente al quadruplo rettangolo di OC in AO. Il che bisognava dimostrare.

Euclide enuncia il teorema precedente come segue.
» Se una linea retta OC sia segata in qualunque modo; il rettangolo con-
» tenuto quattro volte da tutta la linea e da una delle parti OB insieme col
» quadrato dell'altra parte BC, sarà eguale al quadrato di AC che si fa da
» tutta la linea OC, e dalla detta parte OB, siccome da una linea sola.
Questa enunciazione sfugge facilmente dalla memoria; ed oltre a ciò la dimostrazione, che si legge in Euclide, è una delle più lunghe e delle più intricate fra quelle che trovansi nel lib. 2 degli elementi di quel geometra.

INDICE

3.
7.
10.
15.
18.
21.
22.
24
25.
31.
33.
37.
38.
41.
46.

97.
101.
103.
106
111.
114.
117
119
120.
123.

CATECHISMO

DI

MATEMATICHE PURE

AD USO DEGLI STUDI GENERALI

Parte prima — Sezione seconda

GEOMETRIA SOLIDA

GEOMETRIA SOLIDA

DI

CARLO ROCCO

Professore di Geometria nel R. Collegio Militare

SECONDA EDIZIONE

Riveduta, corretta, ed accresciuta.

Mathesis philosophiæ, et scientiis initia, ac veluti mammam præbet.
Bac.

NAPOLI
DALLO STABILIMENTO DEL GUTTEMBERG
1844

Tutti gli esemplari, che non sono muniti della firma dell'Autore, devono considerarsi come contraffatti. C. Rocco

PREFAZIONE

1. La benevola accoglienza fatta dal pubblico a questa nostra istituzione di geometria solida ci ha imposto il dovere di rivederla accuratamente, e di farci qua e là qualche giunta e qualche modificazione affinchè potesse meglio corrispondere all'oggetto per cui fu scritta, cioè quello di rendere la scienza facile ad apprendersi ed a ritenersi, senza toglier nulla al patrimonio di essa, ed a quel rigore, che giustamente si esige in un libro di scienze esatte. Di ciò ognuno avrà potuto convincersi; dappoichè, se non c'inganniamo, pare che siamo riusciti non solo a dimostrar tutto con grande semplicità e rigore, ma ancora ad esporre la scienza con quell'ordine, e con quel legame indispensabili per farla apprendere con grande facilità, perchè ajutano potentemente la memoria e l'intelletto dell'allievo.

2. Nella prima edizione avevamo esposto in una lunga nota, o piuttosto dissertazione, i mezzi e le vedute che ci avevano condotti ad un siffatto risultamento; ma abbiamo stimato doverla togliere nella presente, perchè le considerazioni fatte in quella nota su varii punti dili-

cati della scienza si troveranno più ampiamente sviluppate in altra scrittura, che speriamo poter pubblicare al più presto possibile. Purtuttavolta ci è sembrato di dover qui riportare alcune di quelle considerazioni, affinchè si possa acquistare una idea di ciò che abbiamo fatto; il che ci darà occasione di fare qualche nuova osservazione utile a premunire la gioventù studiosa contro certe opinioni, che in fatto d'istituzione geometrica si spacciano con gravità, e facilmente ne impongono al volgo.

3. La geometria solida può concepirsi divisa in tre parti: la prima riguarda i piani e gli angoli solidi, la seconda i poliedri, la terza i tre corpi rotondi; e queste tre parti corrispondono a quelle, nelle quali abbiamo divisa la geometria piana; perchè quivi abbiam prima parlato delle linee rette e degli angoli piani, poi dei poligoni, e finalmente del cerchio: in guisa che le teoriche della solida si trovano in esatta relazione con quelle della piana. Abbiam poi stimato di esporre la geometria solida, come avevamo già fatto per la piana, in modo che ogni capitolo contenesse una data teorica senza miscugli, per quanto era possibile, perchè così si evita il grave inconveniente di disporre le proposizioni ad arbitrio, con la sola condizione di mantenere l'esattezza delle dimostrazioni. Una siffatta divisione di teoriche riesce più difficile a praticarsi nella geometria solida che nella piana; poichè quando gli oggetti divengono complicati, convien disporli a gruppi, e non disgiungerli con minute divisioni. Quindi ci siamo sforzati di mettere fra le teoriche tal separazione che non impedisse di poter vedere, per così dire, tutta la loro fisonomia.

4. Nella teorica de' piani si è procurato non solo di togliere il disordine che vi esisteva, e di metterla in corrispondenza con la geometria piana là dove ve n'era bisogno, ma si sono ancora riempiti i vuoti di non piccolo momento esistenti in Euclide, ed in Legendre, cioè ne' due più riputati scrittori di elementi geometrici. Di ciò ognuno potrà esser convinto esaminando il nostro lavoro; e basterà qui citare la proposizione che riguarda la misura della inclinazione di una retta con un piano, che non trovasi affatto in Legendre, ed in Euclide si rinviene messa fra le definizioni in un modo imperfetto,

abbenchè sia un teorema, il quale esige una formale dimostrazione. Abbiam poi stimato di dover esporre la teorica compiuta degli angoli solidi, della quale Euclide non ci ha lasciato se non alcune nozioni imperfette, che si risentono della infanzia della scienza. La stessa teorica degli angoli solidi esposta da Legendre è stata non solo estesa, ma modificata in qualche proposizione fondamentale, come quella che riguarda l'uguaglianza degli angoli diedri, quando gli angoli piani di due angoli solidi triedri sono rispettivamente eguali. La dimostrazione di Legendre, o piuttosto di Roberto Simson, non è generale, perchè esaminandola con attenzione suppone tacitamente che due degli angoli piani accennati siano acuti. Oltre a ciò se gli angoli diedri, di cui si vuol dimostrare l'uguaglianza sono ottusi, convien considerare nella dimostrazione un secondo caso, che unito al primo rende la dimostrazione lunga e difficile per i principianti. Si è ovviato a queste difficoltà con una costruzione semplicissima che ognuno può intendere con grande facilità.

In questa seconda edizione si è cercato di render più chiara la dimostrazione della proposizione che riguarda l'angolo triedro supplementario; ed è questo il solo cangiamento fatto nella teorica de' piani e degli angoli solidi, perchè tutto il resto riducesi ad alcune parole aggiunte per servire alla chiarezza.

5. La teorica dei poliedri è monca, ed imperfetta in Euclide, come tutti sanno. I geometri moderni, e soprattutto Legendre, l'hanno perfezionata ed ingrandita con pieno successo; ma ciò non ostante il sistema di quell'antico geometra nel fondo era rimaso lo stesso; il che produceva una complicazione ed una difficoltà grande nell'apprendere una così importante teorica. Ci sembra esser riusciti ad esporla in un modo compiuto e tale che proposizioni difficili si trovano rigorosamente dimostrate con estrema facilità; il che non ha potuto ottenersi senza rifare dalle fondamenta tutta la teorica accennata, mettendo a profitto le meditazioni degli antichi e de'moderni geometri, non che le nostre, qualunque esse siano.

In questa seconda edizione il solo cangiamento notevole consiste in una proposizione da noi introdotta per la prima volta negli elementi, e nella quale si tratta di tra-

sformare un poliedro in una piramide equivalente, analoga a quella, in cui si propone di trasformare un poligono in un triangolo equivalente. La dimostrazione è stata rifatta in modo da togliere qualunque equivoco, e ci sembra di averla esposta con quella chiarezza e semplicità; che stimiamo esser così necessarie ne'libri elementari.

6. La teorica de' tre corpi rotondi comprende principalmente i così detti *teoremi di Archimede* intorno alla misura delle superficie e de' volumi del cilindro retto, del cono retto, e della sfera. Euclide si è occupato dei tre corpi rotondi nel lib. XII, ma siccome non potè darci la misura del cerchio, così non potè darci neppure la misura delle superficie e de' volumi de'tre corpi rotondi: appena arrivò a dimostrare che il cono è la terza parte del cilindro della stessa base e della stessa altezza, che i cilindri simili stanno in ragion triplicata degli assi o de' diametri delle basi corrispondenti, e che le sfere stanno come i cubi de' diametri. Or è manifesto che se si suppongono i teoremi di Archimede, quelli dimostrati da Euclide intorno ai corpi rotondi non sono che semplicissimi corollarj; e per conseguenza quasi tutto il lib. XII di Euclide diviene perfettamente inutile; il che unito a quanto si è detto più sopra dimostra in modo incontrastabile che la geometria solida di Euclide dev' essere eliminata dall' insegnamento, e dev' esser rimessa nelle mani de' geometri fatti, come è avvenuto per i libri di Apollonio, e dello stesso Archimede, che da gran tempo sono stati tolti dalle mani della gioventù studiosa per opera degli stessi ammiratori degli antichi geometri. Che dunque dovrà pensarsi della usanza materiale invalsa per sì luogo tempo nelle scuole, e che tuttavia si mantiene in alcune di esse, cioè di obbligare lo studente di Matematica ad imparare i due libri della geometria solida di Euclide, e dopo questi passare a studiare i teoremi di Archimede, che gli Euclidisti vi aggiungono, senza darne per altro le dimostrazioni lasciateci dal sommo geometra di Siracusa, perchè sono di una complicazione, e di una difficoltà tale che stancherebbe e confonderebbe la mente di un principiante?

Dalle cose fin qui esposte risulta manifesto che per rag-

giungere lo scopo propostoci, cioè quello di ridurre la scienza alla più grande semplicità e brevità possibile, non mancando alla chiarezza ed al rigore, era necessario che nella teorica de' corpi rotondi avessimo messo da parte le dimostrazioni lasciateci da Euclide, e da Archimede, e ci fossimo rivolti totalmente a quelle de' geometri moderni, i quali hanno il merito innegabile di aver esposto la teorica accennata con ordine rigoroso, senza le logiche incongruenze di certi appassionati lodatori, e cattivi interpreti degli antichi geometri, che più sopra abbiamo segnalate.

7. Ma qui insorgeva un'altra difficoltà, cioè quella di dovere scegliere tra le diverse dimostrazioni, che i geometri moderni han dato dei teoremi di Archimede. Il celebre Legendre ha preferito di attenersi a quelle che fece Maurolico, geometra siciliano, in una sua parafrasi assai stimata delle opere di Archimede, che venne pubblicata a Palermo nel 1685 (*).

Quantunque Maurolico sia giunto ad evitare le complicazioni e le lungherie degli antichi geometri, ed a far dipendere le sue dimostrazioni da un solo principio, che sagacemente ricavò dal lib. XII di Euclide (prop. 16), pure bisogna confessare che la maniera da esso tenuta ha il difetto notabile di una uniformità che confonde e stanca; e sebbene abbia il vantaggio di parlare agli occhi, non per tanto il giro del ragionamento ha un non so che di tortuoso che rende le proposizioni difficili ad apprendersi ed a ritenersi, come vien provato dal fatto nell' insegnamento. Di più, le dimostrazioni di Maurolico non sono senza replica, almeno per quelli che pretendono potersi dimostrare i teoremi di Archimede senza la considerazione dell' infinito. Per con-

(*) Legendre non ha nominato Maurolico, ma non ha mai preteso appropriarsi le dimostrazioni di questo celebre geometra, abbenchè le avesse notevolmente modificate ed estese da suo pari. All' opposto uno de' nostri tanti traduttori di Euclide dopo di aver fatto uso delle dimostrazioni accennate ne' così detti *teoremi di Archimede*, nell' edizione del 1843 dice di essersi incontrato in quelle stesse dimostrazioni di Maurolico, che non avea mai conosciute: ed ecco le cose patrie ignorate da quelli stessi che dovrebbero conoscerle; e che per giunta ci rimproverano di ricorrere a libri stranieri nell' insegnamento delle Matematiche!

vincersi di ciò basterà vedere come Maurolico dimostra che il cerchio è uguale ad un rettangolo, di cui un lato rappresenta la circonferenza, e l'altro la metà del raggio: se il cerchio proposto, egli dice, non è uguale a quel rettangolo, vi dovrà essere un cerchio o maggiore o minore del rettangolo medesimo, ed appoggiandosi alla possibilità che vi sia, egli arriva a provare per assurdo che il cerchio proposto dev'esser uguale al rettangolo, di cui è parola. Or è manifesto che quella possibilità può negarsi; e per conseguenza tutta la dimostrazione precipita dalle fondamenta. Egli è vero che Maurolico da geometra profondo ha preveduto la difficoltà; dappoichè nella sua opera si sforza di dimostrare l'indicata possibilità in un lemma; ma quella sua dimostrazione, a tutto rigore, non può sussistere; poichè egli assume come evidente che il rapporto esistente tra un cerchio ed un rettangolo possa esser espresso da due linee; il che suppone quello ch'è in quistione, cioè la possibilità di trasformare il cerchio in un poligono equivalente.

Per giustificare le dimostrazioni di Legendre, o piuttosto di Maurolico, intorno alla misura del cerchio, e quindi de' tre corpi rotondi, il signor Duchesne, geometra francese, ha detto che a partire da zero dando al raggio tutt'i valori possibili si può sempre concepire l'esistenza di un cerchio equivalente ad un rettangolo dato. È questa l'unica idea che possa porsi in campo in difesa di quelle dimostrazioni; e però ognun vede che bisogna ricorrere alla considerazione dell'infinito, ed allora non vale la pena di adottare le dimostrazioni accennate, le quali sono indirette ed hanno qualche volta bisogno di lunghe preparazioni, come avviene soprattutto nella misura della solidità della sfera.

8. Noi abbiam provato nella prima edizione in una nota più sopra citata, che nelle stesse dimostrazioni genuine di Archimede sulla misura del cerchio, e quindi de' tre corpi rotondi, v'era mascherata la considerazione dell'infinito, ma non tolta effettivamente; dappoichè quel sommo geometra è costretto a ricorrere ad un principio, di cui non trovasi fatto uso prima di lui, cioè che la circonferenza del cerchio è maggiore del perimetro del poligono regolare iscritto, ed è minore del

circoscritto. Or un siffatto principio non è evidente, e perciò si sono sforzati a dimostrarlo non solo i geometri moderni, ma anche gli antichi, come appare dalla dimostrazione lasciataci da Eutocio. Ma queste dimostrazioni alla fine de' conti non possono reggere senza la considerazione dell'infinito, cioè senza considerare il cerchio come un poligono regolare di un numero infinito di lati. Per la qual cosa, quando anche si arrivasse a dimostrare rigorosamente, ed indipendentemente dalla misura del cerchio, l'esistenza di un cerchio equivalente ad un rettangolo dato, le dimostrazioni di Maurolico avranno sempre bisogno della considerazione dell'infinito, perchè hanno bisogno del citato principio di Archimede (*).

9. Lacroix, ed altri dotti geometri, si sono appigliati al così detto *metodo de' limiti* per dimostrare i teoremi di Archimede. Questo metodo non è in sostanza, se ben vi si rifletta, che lo stesso *metodo di esaustione* adoperato da Archimede e da Maurolico, ma scevro delle sue complicazioni, poichè il giro astratto del ragionamento che in esso si adopera si riduce sempre ad alcuni principj generali, con l'ajuto de' quali si evita la pesantissima riduzione all'assurdo, ch'è indispensabile nelle dimostrazioni di Archimede, e di Maurolico. Abbenchè il metodo de' limiti sia assai prezioso, e superiore di gran lunga a quello di esaustione, e di esso si faccia uso grandissimo, appena si vada al di là degli elementi, pure non abbiamo stimato doverlo adottare nella teorica de' tre corpi rotondi: in primo luogo perchè nell'applicare que' principj generali ai casi particolari, s'incontra forse tanta lungheria quanta nel metodo di esaustione, almeno (come giustamente riflette il dotto Gergonne) quando si vogliano fare le dimostrazioni in modo da non lasciar luogo ad alcun dubbio; e quindi dovendosi scendere a tutte le particolarità necessarie non

(*) È curioso che il traduttore, di cui si parla nella nota precedente, dopo di aver fatto uso delle dimostrazioni di Maurolico, che poggiano in sostanza sulla considerazione dell'infinito, non cessi di declamare contro i moderni scrittori di elementi geometrici, accusandoli d'introdurre nella scienza la *più adussalo idea dell'infinito* !

si vede perchè il metodo de' limiti debba preferirsi, negli elementi, al metodo di esaustione, il quale quantunque in un modo indiretto ha però una forma tale che non lascia alcun dubbio nella mente. In secondo luogo, e questa è la ragione più forte per noi, perchè il metodo de' limiti ha bisogno del principio di Archimede, cioè delle figure iscritte e circoscritte; e quindi si trova anche in esso mascherata la considerazione dell' infinito, ma non tolta.

10. Non ci restava dunque altra via che quella di ricorrere al così detto *metodo degli infinitamente piccoli*, cioè a quel metodo, in cui si adopera la considerazione dell' infinito apertamente senza orpello o mistero. Le dimostrazioni fatte con questo metodo non hanno bisogno del principio di Archimede; e perciò riescono brevissime, s' imprimono facilmente nella memoria, e di più conservano le tracce della invenzione. E si noti che quando un siffatto metodo venga adoperato come si conviene, e non degeneri in certe vaghe ed arbitrarie forme di ragionamento, che si trovano in alcuni scrittori di elementi, esso è tanto esatto quanto quello di esaustione adoperato da Archimede, e quello de' limiti seguito dai geometri moderni (*).

Ma si potrà dire: se il principio di Archimede è la conseguenza che risulta dal considerare il cerchio come un poligono regolare di un numero infinito di lati, perchè si dovrà far uso di questo oscuro concetto, nel quale si riguarda l' infinito come realmente esistente, e non servirsi piuttosto di quel principio Archimedeo che ha il vantaggio innegabile di rimanersi tra le quantità finite, e perciò si presenta limpido e chiaro alla mente? L'osservazione è giusta; ma dalle cose sopraddette apparisce manifesto che operando in tal modo non si conse-

(*) In methodo infinitesimali cavendum, ne contemnatur aliquid, quod non decrescat ultra quoscumque limites in se determinatos respectu ejus, respectu cujus contemnitur; quod si caveatur, nullus error usquam committi poterit.

Methodus, quam *exhaustionum* vocant, eodem fundamento innititur, quo methodus infinitesimalis; sed multo est implicatior et longior.

Boscovich, Tom. I, p. 164.

guirebbe il rigore che si nega al metodo degl' infinitamente piccoli, perchè si fonderebbe la misura del cerchio e la teorica dei tre corpi rotondi sopra un principio assunto senza dimostrazione, e si renderebbe la scienza difficile ad apprendersi ed a ritenersi. Ed infatti abbiam veduto che gli antichi e moderni geometri lungi dal riguardare come evidente il principio accennato hanno cercato di dimostrarlo a rigore, abbenchè non vi siano riusciti senza la considerazione dell' infinito; e che anche i più appassionati panegeristi degli antichi non hanno avuto il coraggio di riportare le dimostrazioni genuine di Archimede, ma vi hanno supplito in altri modi che non hanno, per esattezza, alcuna reale superiorità sul metodo degl' infinitamente piccoli; poichè *nascondono* la idea dell' infinito senza poterla togliere effettivamente, essendo inerente alla natura del soggetto. Una siffatta idea s' incontra fin dall' entrata della scienza nella teorica delle rette parallele, nel passaggio dalle quantità commensurabili alle incommensurabili, e finalmente in quello della linea retta alla curva, come avviene nella misura del cerchio, e quindi nella teorica de' tre corpi rotondi. Gli antichi in questi tre casi evitarono la considerazione dell' infinito con assumere tre principj come evidenti, cioè il postulato V. di Euclide, il principio degli ugualmente moltiplici, ed il principio di Archimede. Se non si avesse riguardo ai tempi, noi diremmo ch' è questa una maniera assai *comoda* di levare le difficoltà che presenta la natura del soggetto; poichè, come è noto, quei tre principj non sono alla fine de' conti che tre teoremi, che devono essere dimostrati, e non si possono dimostrare senza la considerazione dell' infinito, come è facile restarne convinti esaminando rigidamente le dimostazioni che ne sono state fatte a cominciare dagli antichi greci fino ai geometri de' nostri giorni (*). Le difficoltà

(*) In un rapporto alla R. Accademia di Parigi sulla traduzione francese delle opere di Archimede fatta dal Peyrard, il celebre Lagrange fa menzione, senza dissaprovarla, della opinione di quei geometri, i quali sostengono non potersi dimostrare il principio archimedeo senza la considerazione dell' infinito, il che, come ognun vede, dà gran peso a quanto qui sopra abbiam detto.

non si vincono col dissimularle, ma con attaccarle di fronte. E qui si noti che gli antichi evitando, almeno in apparenza, la considerazione dell' infinito, agirono saggiamente, perchè mancavano delle risorse che ora abbiamo; ma è strano il vedere con quanta cura alcuni geometri moderni si sono sforzati a mascherare l' idea dell' infinito, che volere o non volere s' incontra sempre nei teoremi di Archimede, ed un siffatto procedere è tanto più sorprendente quanto che « la considerazione dell'in- » finito costituisce, per così dire, lo spirito delle mate- » matiche moderne, le quali per ossa appunto si sono » rese tanto superiori alle antiche ».

11. Malgrado la chiarezza delle precedenti ragioni, e di altre molte che uomini di miglior ingegno del nostro hanno dette, o potranno dire in appresso, siamo ben persuasi che, la forza di un'antica tradizionale opinione farà sì che non pochi continueranno ad essere immobilmente attaccati alle antiche forme di ragionamento; e non vorranno mai ammettere che la considerazione dell' infinito possa introdursi senza maschera negli elementi di geometria. Ad imitazione degli antichi Pittagorici, di cui fa menzione uno scoliaste di Euclide, gridderanno la croce addosso a chi farà uso di quella considerazione per render piana e facile la istituzione geometrica; e non mai avranno per buona una dimostrazione, se non quando conservi una cert' aria di mistero, e sia appoggiata a ragionamenti lunghi e difficili. Questi geometri trascendentali credono profanata la scienza, quante volte le dimostrazioni non sono esposte con quel pedantesco giro di parole, che il dottissimo Lacroix ha giustamente chiamato *lo stile de' curiali*; e (cosa da non credersi) si sdegnano ancora che nella geometria s' introduca l' ordine rigoroso delle proposizioni, e quel legame che serve a mostrare tutt' i punti di contatto di esse, ed a predurre nella mente una piena acquiescenza! Nella opinione di questi sapienti il disordine nelle proposizioni, ed il pesante e dommatico apparato nelle dimostrazioni costituiscono il sublime di una istituzione geometrica; e un traduttore di Euclide, di cui abbiam fatto menzione nelle note precedenti, spinge il suo entusiasmo per le antiche forme fino a dire che tutte le istituzioni moderne di geome-

tria sono perniciose alla gioventù studiosa, non ricavandosi da esse che scienza erronea e fallace; e che i soli elementi di Euclide meritano di esser messi nelle mani della gioventù; dappoichè, egli dice, siffatti elementi sono l'opera più perfetta che sia uscita dalla mente umana, e di più sono buoni e sufficienti per i tempi passati, presenti, e futuri, qualunque siasi il progresso che le matematiche potranno fare in avvenire! (*). Invano voi gli domandate le prove di queste matte asserzioni; al più vi cita l'autorità *di 14 secoli culti*, e le opinioni di alcuni matematici, che interpetra a suo modo, e non manca mai di aggiungere alcune frasi che sembrano ragioni, ma non sono in sostanza che pure e prette maldicenze contro coloro, che in vece di dar ascolto alle sue declamazioni, si sono apertamente sottoscritti al giudizio della R. Accademia di Parigi, contenuto in un rapporto fatto dai celebri matematici Prony, Delambre, e Poinsot, e da essa approvato, vale a dire che: *non sarebbe ascoltato chi oggigiorno proponesse di cominciare lo studio delle matematiche da Euclide* (**). E si noti che quell'illustre corpo scientifico possedeva allora i Lagrange, i Laplace, i Monge, i Legendre, i Fourier, i Poisson, i Cauchy, i Biot, gli Arago, ed altri matematici insigni, i cui scritti viveranno lungo tempo nella memoria de' posteri. Noi che non abbiamo avuto la fortuna di esser traduttori e restauratori di antichi geometri, e che amiamo contemplare le matematiche nel loro incremento attuale, e non al traguardo di 14 secoli culti, confessiamo di aver da gran tempo sottocritto a quell'autorevole giudizio, a cui, (chi il crederebbe?) pare che abbia sottoscritto lo stesso traduttore, di cui parliamo; dappoichè in una sua istituzione di geometria pubblicata nel 1804 si esprime in tal modo: « ho cercato di render le dimostrazioni così chiare e precise » che potessero senza stento comprendersi da' giovanetti, » non essendo ad essi possibile tener dietro colla mente

(*) Vedi *Prospetto di un Corso di Matematiche* in 24 vol. in 4, non che le prefazioni e le note ai volumi già pubblicati.

(**) Vedi le opere di Euclide tradotte in francese dal celebre Peyrard

» a quelle di Euclide, le quali chi ben le conosce sa,
» che richieggono un' attenzione ed uno spirito singola-
» re, ed a coloro, che s'istruiscono nè necessario, nè
» comune ».

È questo il più bel commento che si poteva fare a quella sentenza degli accademici di Parigi; onde non aggiungeremo altro, limitandoci a raccomandare alla gioventù studiosa che coltivi le matematiche nello stato d'incremento e di progresso in cui sono, e non in quello, in cui erano due mila e più anni indietro.

GEOMETRIA SOLIDA

SEZIONE SECONDA

CAPITOLO I.

DELLA LINEA RETTA E DEL PIANO IN GENERALE.

1. La *Geometria Solida* considera l'estensione nelle sue tre dimensioni; per cui le linee rette ed i piani si riguardano come situati in qualsivoglia modo nello spazio. E qui giova ricordarsi che la linea retta è di sua natura indefinita, come pure il piano, abbenchè spesso occorra di dover considerare soltanto una parte limitata dell'una, o dell'altro. Laonde quando si dice che un punto è situato fuori di una linea retta, o fuori di un piano, si deve intendere che il punto accennato trovasi al di sopra, o al di sotto della retta, o del piano; o sia sempre fuori de' loro prolungamenti.

PROPOSIZIONE I — *TEOREMA.*

2. *Una linea retta non può avere una sua parte in un piano, e la rimanente fuori del piano medesimo* (fig. 1).

Dimostrazione. Rappresenti la figura *MN* un piano qualunque, e si supponga che la linea retta *ABD* abbia una parte *AB* nel piano *MN*, e la rimanente *BD* fuori di questo piano. Essendo *AB* una linea retta, essa potrà prolungarsi in *C* nel piano *MN*; per conseguenza le due rette *ABD*, *ABC* avrebbero due punti comuni *A*, e *B* senza coincidere in tutta la loro estensione; ma ciò è impossibile, dunque una linea retta non può avere una parte in un piano, e la rimanente fuori del piano medesimo. *C. D. D.*

3. *Corollario.* Apparisce da questo teorema che una linea retta

non può incontrare un piano in più di un punto; poichè se lo incontrasse in due punti, dovrebb' essere tutta intera situata nel piano medesimo. Il punto d' incontro di una retta con un piano dicesi il *piede* della retta sullo stesso piano.

PROPOSIZIONE II — *TEOREMA*.

4. *Un triangolo qualunque è situato in un solo piano* (fig. 2).

Dim. Sia ABC un triangolo qualunque. Se una sua parte $BDEC$ fosse situata in un piano, e la rimanente DAE in un altro, la retta AB avrebbe una sua parte BD nel primo piano, e l' altra DA nel secondo; il che non può sussistere (n.° 2); dunque un triangolo è sempre in un solo piano. *C. D. D.*

5. *Corollario*. Si deduce da questo teorema che *per tre punti* A, B, C *non disposti in linea retta passa un solo e medesimo piano*.

Infatti, congiungendo i tre punti colle rette AB, AC, BC, il triangolo ABC è situato in un solo piano. Quindi per un punto A posto fuori di una retta BC, e per questa retta medesima si può sempre far passare un piano; poichè basta prendere due punti B, e C ad arbitrio nella retta accennata, e condurre il piano per i tre punti A, B, C; nè altro piano potrà passare per la data retta e pel punto dato.

PROPOSIZIONE III — *TEOREMA*.

6. *Due rette che s' incontrano sono situate in un medesimo piano* (fig. 3).

Dim. Perocchè, prendendo ad arbitrio due punti P e N nelle due rette NM, e PQ che s' incontrano nel punto F, e condotta la retta PN, le due linee PF, e NF sono situate nel piano del triangolo PFN: per cui anche le rette MN, e PQ dovranno trovarsi nel medesimo piano (n.° 2). *C. D. D.*

PROPOSIZIONE IV — *TEOREMA*.

7. *Una retta che incontra due altre situate in un piano, dovrà trovarsi nel medesimo piano* (fig. 4).

Dim. Infatti, supponendo che la retta HO incontri le rette AB, e CD situate in uno stesso piano, i punti L, ed E d' incontro si troveranno nel detto piano; e però tutta la retta HO dovrà stare nel piano medesimo (n.° 3). *C. D. D.*

PROPOSIZIONE V — *TEOREMA*.

8. *L' intersezione comune di due piani che s' incontrano è una linea retta* (fig. 5).

Dim. Sia AB l' insersezione comune di due piani MN, e PQ. È manifesto che questa intersezione deve essere una linea, ed una linea retta; perocchè se potesse essere una porzione di superficie, o una linea curva, i due proposti piani avrebbero sempre più di due punti di comune non disposti in linea retta, e si confonderebbero l' uno con l' altro (n.° 5) contro la supposizione; dunque l' intersezione comune di due piani è una linea retta. *C. D. D.*

9. *Scolio.* I principj fin qui esposti sono, come si è veduto, corollarj manifesti della nozione che abbiamo della linea retta, e del piano; in guisa che si potrebbero considerare quasi come assiomi. Essi sono della più grande importanza, perchè sopra siffatti principj semplicissimi è stabilita tutta la geometria solida.

Or siccome nella geometria piana la prima cosa che abbiamo considerata è stato l' incontro, o il non incontro delle rette situate in un piano, così pure nella geometria solida la prima cosa da considerarsi dovrà essere l' incontro, o il non incontro delle linee rette con i piani, e l' incontro, o il non incontro dei piani fra loro, senza che lo spazio rimanga chiuso da per ogni dove.

CAPITOLO II.

DELLE RETTE PERPENDICOLARI, ED OBLIQUE AI PIANI.

10. Per una medesima linea retta AP (fig 6) può passare una infinità di piani differenti; dappoichè un piano può girare intorno di una linea retta condotta in esso comunque, e prendere in questo modo un numero infinito di situazioni diverse senza che i punti della retta cangiano sito. Ciò premesso, si facciano passare per la retta AP due piani differenti APB, ed APC, indi da un medesimo punto P di questa retta si conducano sopra AP le perpendicolari PB, PC, l' una nel piano APB, e l'altra nel piano APC. Or queste due perpendicolari determinano la posizione di un piano MN, poichè s' incontrano nel punto P (n° 6), per conseguenza riesce naturale il ricercare se tirando pel punto P nel medesimo piano MN una qualunque altra retta PD, questa sia pure perpendicolare ad AP.

PROPOSIZIONE VI — *TEOREMA.*

11. *Se una retta* AP *è perpendicolare a due rette* PB. PC *che s'intersegano nel suo piede* P *nel piano* MN, *essa sarà perpendicolare a qualsivoglia retta* PD *condotta pel punto* P *nel piano medesimo* (fig. 6),

Dim. Si prolunghino le rette PB, PC, PD, verso H, E, F, si prenda PB uguale a PH. e PC uguale a PE. e si tirino le rette BC, EH; indi da un punto A della perpendicolare AP si conducano le rette AB, AH, AC. AE, AD, AF.

Poichè l' angolo BPC è uguale al suo verticale EPH, il triangolo

BPC sarà uguale al triangolo *EPH*; per conseguenza si avrà $BC = EH$, e l'angolo $PCD = PEF$. Or essendo di più l'angolo *DPC* uguale al suo verticale *EPF*, ed il lato $PC = PE$, ne segue che il triangolo *DPC* è uguale al triangolo *EPF*; e perciò risulta $PD = PF$, e $DC = EF$. Da un'altra parte nel piano *ABH* le oblique *AB*, *AH* sono uguali come equidistanti dalla perpendicolare *AP*, e lo stesso deve dirsi delle oblique *AC*, *AE* nel piano *ACE*, dunque i triangoli *ABC*, *AEH* sono equilateri fra loro, e però l'angolo *ACD* è uguale all'angolo *AEF*. Quindi i due triangoli *AEF*, *ACD* hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali, per cui sono uguali, ed il lato *AD* è uguale al lato *AF*. Finalmente i triangoli *APD*, *APF* risultano equilateri fra loro, e però l'angolo *APD* sarà uguale all'angolo *APF*, ovvero *AP* è perpendicolare a *PD*. *C. D. D.*

12. *Scolio* I. Una retta dicesi *perpendicolare* ad un piano quando è perpendicolare a tutte le rette che passano pel suo piede in questo piano; poichè in tal caso forma angoli adiacenti uguali con tutte le rette accennate.

Reciprocamente, un piano si dice perpendicolare ad una retta, allorchè contiene tutte le perpendicolari condotte a questa retta per un medesimo punto di essa.

13. *Scolio* II. È facile vedere che la proposizione precedente equivale alla seguente:

Se l'angolo retto APC *gira intorno ad un suo lato* AP *supposto immobile, l'altro lato* PC*, che non cesserà di essere perpendicolare ad* AP*, descriverà nel suo movimento il piano* MN *perpendicolare ad* AP (fig. 6).

Infatti, supponendo che il lato mobile *PC* sia giunto in *PB*, il piano che passa per queste due rette è determinato, e la retta *PC* in tutte le sue posizioni non potrà mai trovarsi fuori di questo piano, perchè tutte le rette che si conducono pel punto *P* nel piano *MN* sono perpendicolari ad *AP*, e quindi coincidono con le varie posizioni del lato mobile *PC*.

PROPOSIZIONE VII — *TEOREMA.*

14. *Per un punto dato non si può condurre ad un piano che una sola perpendicolare* (fig. 7).

Dim. Sia *A* un punto situato fuori del piano *MN*, e si supponga, se è possibile, che le rette *AP*, *AD* sieno due perpendicolari a questo piano; indi si conduca la retta *PD*. Nel triangolo *APD* vi sarebbero due angoli retti; il che è assurdo; dunque dal punto *A* non si può abbassare sul piano *MN* che una sola perpendicolare.

Se poi il punto dato è *P* nel piano *MN*, e si supponga che le rette *PA*, *PE* sieno due perpendicolari al piano medesimo, allora facendo passare per le dette perpendicolari un piano che tagli il piano *MN* secondo la retta *PD*, gli angoli *APD*, *EPD* sarebbero retti

ambedue; e però la parte sarebbe uguale al tutto, il che non può sussistere. Dunque per un punto dato non si può condurre ad un piano che una sola perpendicolare. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE VIII — *PROBLEMA*.

15. *Per un punto* A *situato fuori di un piano* MN *abbassare una perpendicolare sopra questo piano* (fig. 8).

Soluzione. Si conduca una retta *BC* nel piano *MN*, per questa retta e pel punto *A* si faccia passare un piano (n. 5), indi in questo si abbassi sopra *BC* la perpendicolare *AD*, e dal punto *D* si conduca nel piano *MN* la retta *DP* perpendicolare a *BC*. Finalmente si faccia passare un piano per le rette *AD*, *DP*, ed in questo piano si cali sopra *DP* la perpendicolare *AP*, questa sarà perpendicolare al piano *MN*.

Infatti, si prenda $BD = CD$, e si tirino le rette *PB, PC, AB, AC*. Il quadrato di *AB* è uguale ai quadrati di *AD*, e *DB*, perchè è retto l'angolo *ADB*; ma per la stessa ragione il quadrato di *AD* è uguale alla somma de'quadrati di *AP*, *PD*, dunque sarà il quadrato di *AB* uguale alla somma dei tre quadrati di *AP*, *PD*, *DB*, ovvero de'quadrati di *AP*, *PB*, perchè è retto l'angolo *PDB*. Quindi l'angolo *APB* è retto, e nello stesso modo potendo dimostrarsi che l'angolo *APC* è retto, ne segue che *AP* è perpendicolare al piano *MN* (n.° 11). *C. D. F.*

PROPOSIZIONE IX — *TEOREMA*.

16. *Se da un punto* A *situato fuori di un piano MN si conducano sopra questo piano la perpendicolare* AP, *e differenti oblique* AB, AD, AC, AE, ecc.

1.° *La perpendicolare sarà più corta di ogni obliquo*.

2.° *Le oblique equidistanti dalla perpendicolare saranno uguali fra loro*.

3.° *Di due oblique qualunque quella che più si allontana dalla perpendicolare sarà la più lunga* (Fig. 6).

Dim. Infatti, se si conducano le rette *PB*, *PD*, *PC*, P*E*, ecc.; e si facciano girare gli angoli retti *APC*, *APD*, *APE*, ecc: intorno ad *AP*, tutte le oblique potranno ridursi ad essere situate in un medesimo piano *ABH*; e per conseguenza il teorema proposto si dimostrerà come nella geometria piana (n. 75). *C. D. D.*

PROPOSIZIONE X — *TEOREMA*

17. *Se da un punto* A *della retta* AD *obliqua al piano* MN *si abbassi la perpendicolare* AP *sopra questo piano, e si conduca la retta* DP, *l'obliqua* AD *sarà perpendicolare alla retta* BC *tirata perpendicolarmente a* DP *nel piano* MN (fig. 8).

Dim. Si prenda $BD = CD$, e si tirino le rette PB, PC, AB, AC. Essendo $BD = CD$, le obblique PB, PC saranno uguali perchè equidistanti dalla perpendicolare PD. Parimente le oblique AB, AC saranno uguali come equidistanti dalla perpendicolare AP, dunque rispetto ad AD le rette AB, AC sono due oblique uguali, ed equidistanti. e per conseguenza AD è perpendicolare a BC. *C. D. D.*

18. *Corollario.* Essendo la retta BC perpendicolare alle due rette DP, e DA, sarà perpendicolare al piano APD che passa per le rette medesime (n. 11).

PROPOSIZONE XI — *PROBLEMA*

19. *Da un punto* D *situato nel piano* MN *innalzare una perpendicolare sopra questo piano* (fig. 9).

Sol. Da un punto A situato fuori del piano MN si abbassi sopra questo piano la perpendicolare AP, e si conduca la retta PD; indi si faccia passare per le rette AP, PD un piano, nel quale si tiri la retta DE perpendicolare a DP, sarà DE la perpendicolare richiesta. Infatti, se si conduca la retta BC perpendicolarmente a DP nel piano MN, l'angolo EDB sarà retto; perchè BD è perpendicolare al piano $APDE$ (n. 18), e per conseguenza a tutte le rette che sono in esso come la DE. Ma per costruzione è retto l'angolo EDP, dunque la retta ED è perpendicolare alle due rette DP, DB, e però è perpendicolare al piano MN. *C. D. F.*

PROPOSIZIONE XII — *PROBLEMA*.

20. *Per un punto* O *di una retta* AE *condurre un piano perpendicolare a questa retta* (fig. 10).

Sol. Si facciano passare per la retta data due piani qualunque. In uno di questi piani si conduca la retta OB perpendicolare ad AE; e nell'altro la retta OC anche perpendicolare ad AE. Finalmente per le rette OB, OC si faccia passare un piano MN, questo sarà perpendicolare alla retta data (n° 12); poichè essendo AO perpendicolare alle due rette OB, OC, dev'essere perpendicolare al piano determinato da queste rette. *C. D F.*

PROPOSIZIONE XIII. — *PROBLEMA*.

21. *Per un punto* B *situato fuori di una retta* AE *condurre un piano perpendicolare a questa retta* (fig. 10).

Sol. Pel punto dato B e per la retta AE si conduca un piano, nel quale si abbassi BO perpendicolare sopra AE; secondo questa ultima retta si conduca un altro piano qualunque, ed in essa s'innalzi OC perpendicolare ad AE. Finalmente per le rette BO, ed OC si faccia

passare un piano; questo sarà il piano richiesto: poichè contiene *BO*, ed *OC* ambedue perpendicolari ad *AE*. *C. D. F.*

CAPITOLO III.

DELLE RETTE PARALLELE FRA LORO, E DELLE RETTE PARALLELE AI PIANI.

22, Nella proposizione X (fig. 9) si è veduto che le rette *BC*, *AP*, situate l'una nel piano *MN*, l'altra nel piano *APD*, sono perpendicolari ad una medesima retta *DP*. Or è da osservarsi che quantunque queste due perpendicolari non possono incontrarsi, pure non si dicono *parallele*: dappoichè si è convenuto di chiamar esclusivamente *rette parallele* quelle ch'essendo situate in un medesimo piano non s'incontrano mai. Epperò quando si mette per ipotesi che due rette date sono parallele, si sottintende implicitamente che sono poste in un medesimo piano. Da ciò ne consegue che *Due rette parallele determinano la posizione di un piano.*

23. Una retta si dirà essere *parallela* ad un piano, allorchè prolungandosi l'una e l'altro non s'incontrano mai.

PROPOSIZIONE XIV — *TEOREMA*

24. *Se due rette* AP, ED *sono parallele, ed una di esse è perpendicolare ad un piano* MN, *anche l'altra sarà perpendicolare al medesimo piano* (fig 9).

Dim. Sia *AP* perpendicolare al piano *MN*: si tirino le rette *PD*, *AD*, e nel piano *MN* si conduca a *DP* la perpendicolare *BC*, questa sarà pure perpendicolare al piano *APD* (n° 18), ovvero al piano *APDE* delle parallele *AP*, *DE*. Quindi sarà retto l'angolo *EDB*; ma in virtù delle medesime parallele è anche retto l'angolo *EDP*, dunque la retta *ED* è perpendicolare alle due *DB*, *DP*, e per conseguenza al piano *MN*. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XV — *TEOREMA.*

25. *Due rette* AP, ED *perpendicolari ad un medesimo piano* MN *sono parallele fra loro* (fig. 9).

Dim. Perocchè, se *ED* non è parallela ad *AP*, si conducano le rette *PD*, *AD*, e nel piano *APD* si tiri pel punto *D* una retta parallela ad *AP*, la quale sarà perpendicolare al piano *MN* (n° 24). Ma per ipotesi anche *DE* è perpendicolare ad *MN*; dunque si potrebbero innalzare dal punto *D* due perpendicolari ad un medesimo piano; il che è assurdo; e però *ED* è parallela ad *AP*. *C. D. D.*

26. *Corollario.* Segue da questo teorema che per un punto *P* preso fuori di una retta *ED* non si può condurre a questa retta che

una sola parallela PA. Infatti, pel punto P si faccia passare un piano MN perpendicolare alla retta DE (n° 20); se pel punto P si potesse condurre a DE un' altra parallela, questa sarebbe perpendicolare al piano MN, ed allora per uno stesso punto si potrebbero innalzare due perpendicolari al piano MN, il che non può sussistere.

PROPOSIZIONE XVI — *PROBLEMA*.

27. *Per un punto dato condurre una parallela ad una retta data* (fig. 9).

Sol. Sia P il punto dato, e DE la retta data; per questo punto e la retta accennata si faccia passare un piano, nel quale si conduca PA parallela a DE, è manifesto che PA sarà la parallela richiesta. *C. D. F.*

PROPOSIZIONE XVII — *TEOREMA*.

28. *Due rette* AB, DF *parallele ad una terza* CE *sono parallele fra loro* (fig. 11).

Dim. Per un punto E della retta CE si conduca un piano perpendicolare a questa retta (n° 20), le rette AB, DF essendo per ipotesi parallele a CE, saranno perpendicolari al piano MN (n° 24). e però saranno parallele fra loro. *C. D.D.*

29. *Scolio*, Il teorema analogo; cioè quando le tre rette sono situate in un medesimo piano è stato dimostrato nella geometria piana (n° 48).

PROPOSIZIONE XVIII — *TEOREMA*.

30. *Se una retta* AB *situata fuori di un piano* MN *è parallela ad una retta qualunque* CD *condotta in questo piano, essa sarà parallela al piano medesimo* (fig. 12),

Dim. Essendo parallele le rette AB, CD, saranno situate in un medesimo piano $ABCD$; per conseguenza se AB prolungata incontrasse il piano MN dovrebbe ancora incontrare la retta CD, contro la supposizione; dunque AB è parallela al piano MN. *C. D. D.*

CAPITOLO IV.

DEI PIANI PARALLELI FRA LORO.

31. Due piani si dicono *paralleli*, allorchè prolungati indefinitamente non possono incontrarsi.

PROPOSIZIONE XIX — *TEOREMA*

32. *Due piani* MN, PQ *perpendicolari ad una medesima retta* AB *sono paralleli fra loro* (fig. 13)

Dim. Perocchè se i due piani non sono paralleli, prolungati sufficientemente dovranno incontrarsi: sia *O* un punto della loro comune intersezione, e da questo punto si tirino le rette *OA*, *OB*, che giaceranno nei piani. Essendo per ipotesi la retta *AB* perpendicolare ai due piani, gli angoli *OAB*, *OBA* saranno retti (11); per conseguenza nel triangolo *OAB* vi sarebbero due angoli retti; il che è assurdo; dunque i due piani sono paralleli. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XX — *TEOREMA*.

33. *Le intersezioni* AB, CD *di due piani paralleli* MN, PQ *con un terzo piano* ABCD *sono parallele fra loro* (fig. 12).

Dim. Infatti, se *AB* potesse incontrare *CD*, il punto d'incontro dovrebbe trovarsi nei due piani *MN PQ*; ma per ipotesi questi due piani sono paralleli, e perciò non possono avere alcun punto comune, dunque anche *AB* è parallela a *CD*. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XXI — *TEOREMA*.

34. *Se due piani* MN, PQ *sono paralleli, ogni retta* AB *perpendicolare all'uno è ancora perpendicolare all'altro* (fig. 13).

Dim. Sia *AB* perpendicolare al piano *PQ*; si conduca una retta *BC* comunque nel piano medesimo, indi per le due *AB*, *BC* si faccia passare un piano che tagli il piano *MN* secondo la retta *AD*. Essendo per ipotesi paralleli i due piani *MN*, *PQ*, le intersezioni *AD*, *BC* di questi piani col piano *DABC* saranno parallele (n. 33); ma *AB* è perpendicolare a *BC*, perchè si è supposta perpendicolare al piano *PQ*, dunque *AB* sarà ancora perpendicolare ad *AD*; e siccome per ipotesi *BC* è una retta qualunque, ne segue che *AB* è perpendicolare a tutte le rette che passano pel suo piede nel piano *MN* ovvero è perpendicolare a questo piano. *C. D. D.*

35 *Corollario* I. Da questo teorema s'inferisce che per un punto *B* situato fuori di un piano *MN* non si può condurre che un solo piano parallelo al piano *MN*. Perocchè, se si potessero condurre due piani paralleli, essi sarebbero ambidue perpendicolari alla retta *AB* abbassata dal punto *B* perpendicolarmente sopra il piano *MN*; ed in tal caso per un punto di una retta si potrebbero innalzare due piani perpendicolari alla retta medesima, il che non può sussistere, (n. 35).

36. *Corollario* II. *Due piani paralleli ad un terzo piano sono paralleli fra loro*: perocchè se s'incontrassero, da un punto della loro comune intersezione si potrebbero condurre due piani paralleli ad un altro piano; il che è impossibile (n. 35).

PROPOSIZIONE XXII — *PROBLEMA*.

37. *Per un punto dato* B *condurre un piano parallelo ad un piano* MN (fig. 13).

Sol. Dal punto *B* si abbassi sopra il piano *MN* la perpendicolare *BA*, indi pel medesimo punto si conduca un piano *PQ* perpendicolare alla retta *BA* (n. 20), è manifesto che *PQ* sarà il piano richiesto (n 32) *C. D. F.*

PROPOSIZIONE XXIII — *TEOREMA.*

38. *Le rette parallele* AC , BD *comprese fra i piani paralleli* MN, PQ *sono uguali fra loro* (fig. 12.)

Dim. Infatti, essendo *AC* parallela a *BD*, esse saranno situate in un medesimo piano *ABDC*, di cui le intersezioni con i piani *MN* , *PQ* sono parallele (n. 33) La figura *ABDC* è dunque un parallelogrammo; e però si avrà $AC = BD$. *C. D. D.*

39. *Corollario.* Da questo teorema si deduce che

Due piani paralleli sono equidistanti fra loro.

Infatti, se due rette *AC*, *BD* sono perpendicolari ai piani (fig.12) *PQ*, *MN*, ciascuna di esse misurerà la più corta distanza di questi piani , perchè ogni obliqua sarebbe più lunga.

PROPOSIZIONE XXIV. — *TEOREMA.*

40. *Due rette comprese fra tre piani paralleli sono divise in parti proporzionali* (fig. 14.).

Dim. Sieno le rette *AB*, *CD* comprese fra tre piani paralleli *MN*, *PQ*, *RS*, si tiri la retta *AD* che incontri il piano *PQ*, nel punto *G*: indi si conducano le rette *AC*, *EG*, *GF*, *BD*.

Le intersezioni *EG* , *BD* dei piani paralleli *PQ* , *RS* col piano *ABD* essendo parallele (n. 33), le rette *AB*, *AD* saranno divise in parti proporzionali nei punti *E*, *G*; e però la ragione di *AE* ad *EB* sarà uguale a quella di *AG* a *GD* Parimente essendo *AC* parallela a *GF*, sarà la ragione di *AG* a *GD* uguale a quella di *CF* a *FD* ; ma due ragioni uguali ad una terza sono uguali fra loro , dunque, $AE : EB :: CF : FD$. *C. D. D.*

CAPITOLO V.

DEGLI ANGOLI CHE LE RETTE FANNO TRA LORO NELLO SPAZIO, E DEGLI ANGOLI CHE FORMANO CON I PIANI.

41. Quando due rette si tagliano nello spazio, esse determinano un piano; per conseguenza tutto ciò che si è dimostrato nella geometria piana intorno agli angoli formati da due rette sopra un piano può applicarsi agli angoli formati da due rette che si tagliano nello spazio. Qui dunque esporremo ciò che riguarda gli angoli che non sono situati nello stesso piano.

PROPOSIZIONE XXV — *TEOREMA*.

42. *Se due angoli non situati nello stesso piano hanno i lati rispettivamente paralleli e rivolti dalla stessa parte, essi saranno uguali, ed i loro piani saranno paralleli* (fig. 11).

Dim. Sieno CAD, EBF due angoli situati l'uno nel piano PQ, e l'altro nel piano MN: si faccia $AC = BE$, $AD = BF$, e si conducano le rette AB, CE, DF, CD, EF.

Essendo AC uguale e parallela a BE, la figura $ABEC$ sarà un paparallelogrammo; e però sarà AB uguale e parallela a CE. Parimente si dimostra che AB è uguale, e parallela a DF, dunque CE è uguale e parallela a DF, (n. 28), onde si avrà $CD = EF$, ed il triangolo CAD sarà uguale al triangolo EBF; e l'angolo $CAD = EBF$.

In secondo luogo, il piano CAD sarà parallelo al piano EBF. Infatti, se pel punto A si conduca un piano parallelo al piano BEF, questi due piani dovranno incontrare le tre rette parallele AB, CE, DF in modo che le parti di queste rette comprese fra essi sieno uguali (n.38); ma AB. CE DF sono uguali fra loro, dunque il piano parallelo al piano BEF deve confondersi col piano ACD. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XXVI — *TEOREMA*.

43. *Se due rette non sono situate in un medesimo piano, saranno sempre situate in due piani paralleli* (fig. 15).

Dim. Sieno le due rette AB, CD non situate in un medesimo piano; si conduca pel punto E la retta EF parallela a CD, e pel punto C la retta GH parallela ad AB: il piano determinato dall'incontro delle rette BE, EF sarà parallelo al piano determinato dalle rette HC, CD (n. 42); per conseguenza le rette AB, CD saranno situate in piani paralleli. *C. D. D.*

44. *Scolio.* Quando due rette non sono situate in un medesimo piano, esse non formano angolo propriamente parlando, non ostante volendosi valutare la loro scambievole inclinazione si conduce per un punto di una di esse una retta parallela all'altra. e l'angolo formato dalle due rette misura l'inclinazione richiesta. Se poi una retta incontra un piano senza che sia a questo perpendicolare, essa può avvicinarsi più o meno al piano medesimo, ovvero essere più o meno inclinata a questo piano. La misura di siffatta inclinazione sarà data nel teorema qui appresso.

PROPOSIZIONE XXVII — *TEOREMA*.

45. *L'angolo* ADP *formato dalla obliqua* AD *e dalla retta che unisce il piede* D *della obliqua col piede* P *della perpendicolare* AP *al piano* MN, *misura la inclinazione della obliqua col piano medesimo* (fig. 16).

Dim. Perchè una siffatta misura possa essere legittima, convien dimostrare in primo luogo che l'angolo ADP non varia da qualunque punto della obliqua si abbassi la perpendicolare sul piano, ed in secondo luogo che l'angolo medesimo sia il più piccolo di tutti quelli che la obliqua accennata può fare con qualsivoglia altra retta DC condotta pel punto D nel piano MN.

1°. Sia EF un'altra perpendicolare abbassata da un punto qualunque E della obliqua AD sul piano MN. Le due rette AP, EF essendo perpendicolari ad un medesimo piano sono parallele fra loro, e determinano un piano, in cui si ritrova la retta AD, poichè una parte AE di questa retta si contiene nel detto piano; per conseguenza i punti P, F, D devono ancora trovarsi nel piano medesimo; ma questi stessi punti sono posti nel piano MN, dunque essi stanno nella intersezione comune dei due piani; vale a dire sono in linea retta. Laonde qualunque siasi la perpendicolare EF abbassata da un punto della obliqua AD sul piano MN, il suo piede F sarà sempre situato sopra la retta PD; per cui l'angolo ADP resterà sempre lo stesso.

2°. Si faccia $DC = DF$, e si conduca la retta EC; i due triangoli EDC, EDF hanno due lati respettivamente uguali a due lati, ma il terzo lato EC del primo è maggiore del terzo lato EF del secondo, perchè EF è perpendicolare, ed EC è obliqua al piano MN, dunque sarà l'angolo EDC maggiore dell'angolo EDF; e però l'angolo ADP sarà il più piccolo di tutti gli angoli che la obliqua AD può formare con qualsivoglia altra retta diversa da DP nel piano MN. *C. D. D.*

CAPITOLO VI.

DEGLI ANGOLI FORMATI DAI PIANI CHE S'INCONTRANO, OVVERO DEGLI ANGOLI DIEDRI.

46. Allorchè due piani MD, CN (fig. 17) s'incontrano, la quantità più o meno grande, di cui l'uno si allontana dall altro, in quanto alla loro posizione, dicesi ***angolo diedro***, cioè angolo a due facce. La comune intersezione DC chiamasi ***spigolo***, e corrisponde al vertice dell'angolo formato da due linee rette in un piano, mentrechè le facce MD, CN corrispondono ai lati di questo medesimo angolo, avvertendo nondimeno che lo spigolo, e le facce dell'angolo diedro si devono considerare sempre come indefiniti.

47. Per indicare un angolo diedro si adoperano comunemente quattro lettere: così volendo indicare l'angolo formato dai piani MD, CN si dice: *l'angolo diedro* $MCDN$, avendo cura di mettere in mezzo le due lettere che servono a dinotare lo spigolo. La ragione di ciò è manifesta, dappoichè tre punti bastano a determinare la posizione di un piano, e quindi prendendo una lettera in ciascuna faccia, e due nello spigolo si vengono a determinare i piani che formano l'angolo diedro. Purtuttavolta è d'avvertirsi che può indicarsi

un angolo diedro nominando soltanto due lettere prese nello spigolo; e perciò in vece di dire: *l'angolo diedro MCDN*, si dirà semplicemente: *l'angolo diedro CD*, come alle volte s'indica un angolo piano rettilineo nominando la sola lettera del suo vertice.

48. Se per un punto qualunque *O* dello spigolo *DC* si conducano due perpendicolari *OB*, *OA* allo stesso spigolo, l'una nel piano *CN*, e l'altra nel piano *MD*, l'angolo *AOB* sarà un angolo piano rettilineo. All'angolo formato in tal guisa si dà il nome di *angolo piano corrispondente all'angolo diedro MCDN*: dappoichè quest'angolo è sempre lo stesso in tutti i punti dello spigolo. Infatti supponendo che le rette *MC*, *KC* sieno perpendicolari allo spigolo *CD*, l'angolo *MCK* sarà uguale all'angolo *AOB*, perchè hanno i lati respettivamente paralleli e rivolti dalla stessa parte (n° 24).

49. È manifesto che un angolo diedro risulta uguale ad un altro angolo diedro, allorchè sovrapponendo una faccia del primo ad una faccia del secondo, e lo spigolo allo spigolo, la rimanente faccia del primo combacia con la rimanente faccia del secondo, precisamente come avviene negli angoli piani rettilinei,

50. Un piano dicesi *perpendicolare* ad un altro allorchè forma con questo due angoli diedri adiacenti uguali fra loro. Ciascuno di questi angoli chiamasi *angolo diedro retto*. Si comprende che si debba intendere per angolo *diedro acuto*, *ed ottuso*.

PROPOSIZIONE XXVIII — *TEOREMA*.

51. *Se due angoli diedri* MCDN, mcdn *sono uguali*, *gli angoli piani corrispondenti*, AOB, aob *saranno ancora uguali* (fig. 17).

Dim. Si applichi l'angolo diedro *mcdn* sull'angolo diedro *MCDN* in modo che gli spigoli *cd*, *CD* coincidano, come pure le facce *md*, *MD*; e che il punto *o* cada sul punto *O*, il lato *oa* cadrà sul lato *OA*, perchè sono retti gli angoli *doa*, *DOA*. Parimente la faccia *cn* dovrà combaciare colla faccia *CN*, e però il lato *ob* cadrà sul lato *OB*; dunque il piano *aob* combacerà col piano *AOB*, e l angolo *aob* sarà uguale all'angolo *AOB*. *C. D. D.*

52. *Scolio*. La reciproca di questa proposizione è così manifesta che non occorre dimostrarla.

PROPOSIZIONE XXIX — *TEOREMA*.

53. *Se un piano* BK *è perpendicolare ad un altro* MN, *ogni retta* AP *condotta perpendicolarmente alla intersezione comune* BC *nel piano* BK *sarà perpendicolare al piano* MN (fig. 18).

Dim. Nel piano *MN* si tiri *DE* perpendicolare a *BC*. Essendo per ipotesi uguali gli angoli diedri che il piano *BK* forma col piano *MN*, gli angoli piani corrispondenti *AFD*, *APE* saranno ancora

uguali (n° 51). Quindi la retta AP sarà perpendicolare alle due rette BC, DE che passano pel suo piede P nel piano MN, e però sarà perpendicolare a questo medesimo piano. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XXX — *TEOREMA.*

54. *Se una retta* AP *è perpendicolare ad un piano* MN, *ogni piano* BK *che passa per questa retta sarà perpendicolare al medesimo piano* (fig. 18).

Dim. Pel punto P si conduca nel piano MN la retta DE perpendicolare alla intersezione comune BC dei due piani. Essendo per ipotesi AP perpendicolare al piano MN, gli angoli APD, APE saranno retti, e perciò uguali; ma questi sono gli angoli piani corrispondenti agli angoli diedri adiacenti che il piano BK forma col piano MN, dunque il piano BK è perpendicolare al piano MN (n°50). *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XXXI — *TEOREMA.*

55. *Se due piani* BG, DF, *che s'intersegano, sono perpendicolari ad un piano* MN, *la loro comune intersezione* AP *sarà perpendicolare al medesimo piano* (fig. 19).

Dim. Imperocchè, se AP non è perpendicolare al piano MN, non potrà essere neppure perpendicolare alle due rette BC, DE che passano pel suo piede P nel piano MN; quindi nel piano BG si potrebbe condurre dal punto P una perpendicolere a BC, e nel piano DF una perpendicolare a DE. Ma ciascuna di queste perpendicolari dovrebbe essere perpendicolare al piano MN (n° 53); il che è assurdo (n° 14), dunque AP è perpendicolare al piano MN. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XXXII — *TEOREMA.*

56. *Due angoli diedri qualunque stanno come i loro angoli piani corrispondenti* (fig. 17).

Dim. Sieno $MCDN$, $mcdn$ due angoli diedri qualunque, ed AOB aob i loro angoli piani corrispondenti.

Nel piano AOB si descriva col centro in O, e con un raggio ad arbitrio l'arco di circolo AB; lo stesso si faccia nel piano aob, prendendo per raggio $oa = OA$.

Ciò premesso, si supponga in primo luogo che gli archi AB, ab sieno commensurabili, e che la loro comune misura sia contenuta m volte nell'arco AB, e n volte nell'arco ab. Si divida l'arco AB in m parti uguali portando la comune misura sopra di esso, e l'arco ab in n parti uguali, indi si congiungano i punti di divisione col centro O, e col centro o, le rette congiungenti saranno raggi che divi-

deranno l'angolo AOB in m parti uguali, e l'angolo aob in n parti uguali. Or se per tutti questi raggi, e per gli spigoli DC, dc si facciano passare i piani che vengono determinati dall'incontro dei raggi con gli spigoli medesimi, l'angolo diedro $MCDN$ sarà diviso in m angoli diedri uguali, e l'angolo diedro $mcdn$ in n angoli diedri uguali, perchè i loro angoli piani corrispondenti sono uguali fra loro. Laonde risulta manifesto che gli angoli diedri proposti stanno come i loro angoli piani corrispondenti.

La stessa proporzione sussiste ancora quando gli archi AB, ab non sono commensurabili, e ciò si dimostra applicando a questo caso il ragionamento fatto per un caso analogo nella geometria piana (n° 205); dunque gli angoli diedri stanno come i loro angoli piani corrispondenti. *C. D. D.*

57. *Scolio*. Questa proposizione si enuncia ancora dicendo che: *Un angolo diedro qualunque ha per misura l'angolo piano corrispondente, ovvero l'arco di circolo che serve di misura all'angolo piano medesimo.*

Infatti, se si prenda per unità di misura degli angoli diedri *l'angolo diedro retto*, da quanto qui sopra si è dimostrato ne consegue che *un angolo diedro qualunque sta all'angolo diedro retto come l'angolo piano corrispondente al primo sta all'angolo piano corrispondente al secondo, cioè all'angolo retto.*

Quindi il rapporto di un angolo diedro qualunque alla sua unità di misura è uguale al rapporto dell'angolo piano corrispondente alla sua unità; il che equivale a dire che un angolo diedro qualunque ha per misura l'angolo piano corrrispondente.

PROPOSIZIONE XXXIII — *TEOREMA.*

58. *Se per un punto* B *dello spigolo* OE *di un angolo diedro* DOEF *si conducano le rette* BP, BQ *respettivamente perpendicolari alle facce* OD, OF, *l'angolo* PBQ *formato da queste perpendicolari sarà il supplemento dell'angolo* ABC *che misura l'angolo diedro* (fig. 20).

Dim. La retta BP essendo perpendicolare al piano OD, sarà perpendicolare alla retta OE, che passa pel suo piede in questo piano. Parimente la retta BQ sarà perpendicolare ad OE. Da un'altra parte le rette BA, BC sono ancora perpendicolari ad OE per ipotesi, dunque le quattro rette BA, BP, BQ, BC sono situate nel piano che sarebbe prodotto dal rivolgimento dell'angolo retto EBA intorno al lato EB supposto immobile (n° 13); e perciò la somma de'quattro angoli, ABC, ABP, PBQ, QBC equivale a quattro angoli retti; ma gli angoli ABP, e QBC sono retti, dunque gli altri due presi insieme sono uguali a due retti, e per conseguenza l'angolo PBQ è il supplemento dell'angolo ABC che misura l'angolo diedro proposto. *C. D. D.*

CAPITOLO VII.

DEGLI ANGOLI SOLIDI.

59. Se più piani si tagliano a due a due e si riuniscono tutti in un medesimo punto, lo spazio angolare da essi compreso dicesi *angolo solido*, o *angolo poliedro*.

60. Questa definizione è sufficiente a dare una idea chiara dell'angolo solido; dappoichè l'angolo sia piano, sia solido non può definirsi, rigorosamente parlando, essendo impossibile definire esattamente in che consiste la inclinazione di due rette chè s'incontrano in un medesimo piano senza formare una sola linea, o quella che risulta da tre, o più rette, le quali sono situate in piani differenti, e concorrono in un medesimo punto. Del resto, come già osservammo parlando dell'angolo piano, una definizione esatta dell'angolo solido non è necessaria: poichè si può conoscere l'uguaglianza di due angoli solidi sovrapponendo l'uno all altro, e ciò basta per fondare l'esatta teorica di detti angoli.

61. Il punto d'incontro dei piani che formano l'angolo solido chiamasi *vertice* dell'angolo stesso; e le intersezioni dei piani medesimi si dicono *spigoli*, o *costole* dell'angolo solido.

62. L'angolo solido prende il suo nome particolare dal numero dei piani che lo costituiscono: così (fig 21) l'angolo formato in S dai tre piani SAB, SAC, SBC si dice *angolo solido triedro*, o più semplicemente *angolo triedro*; quello formato da quattro piani chiamasi *angolo solido tetraedro*, o *angolo tetraedro*, ecc.

63. In qualunque angolo solido si distinguono gli *angoli piani rettilinei* formati dagli spigoli in ciascuna faccia, come sarebbero (fig. 21) gli angoli BSA, BSC, ASC, e gli angoli diedri delle facce o piani successivi che costituiscono l'angolo solido medesimo.

64. Per indicare un angolo solido si enuncia la lettera del vertice ponendo di seguito tutte le altre lettere respettivamente situate sopra i suoi spigoli: così si dice (fig. 21) *l'angolo solido SABC*. Talvolta si adopera la sola lettera del vertice, dicendosi *l'angolo solido S*.

65. L'angolo solido si dirà *convesso* quando il piano di ciascuna faccia prolungato non taglia l'angolo medesimo, vale a dire quando tutti i suoi angoli diedri sono *salienti*. Tale è l'angolo solido $SABC$ (fig. 21), in cui niuno spigolo è *rientrante*. E qui giova osservare che negli elementi di geometria si considerano i soli angoli solidi convessi.

PROPOSIZIONE XXXIV — *TEOREMA*.

66. *In ogni angolo triedro uno qualunque dei suoi tre angoli piani è minore della somma degli altri due* (fig. 21).

Dim. Sia $SABC$ un angolo triedro, e sia ASB il maggiore dei tre angoli piani ASB, ASC, CSB. Nel piano BSA si faccia l'angolo ASD uguale all'angolo ASC, indi nel medesimo piano si conduca una retta AB che incontri le rette SA, SD, SB; si prenda $SC = SD$ e si tirino le rette AC, BC. I triangoli ASD, ASC sono uguali, perchè hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali, onde si avrà $AD = AC$. Or nel triangolo ABC il lato AB è minore della somma dei lati AC, CB, dunque togliendo da una parte AD, e dall'altra la sua uguale AC, resterà DB minore di BC. Quindi i due triangoli SBC, SBD avranno il lato $SC = SD$, il lato SB comune, ed il terzo lato BC del primo maggiore del terzo lato BD del secondo, e però sarà l'angolo BSC maggiore dell'angolo BSD: aggiungendo da una parte l'angolo ASD, e dall'altra il suo uguale ASC, risulta l'angolo ASB minore della somma degli angoli ASC, BSC. C. D. D.

PROPOSIZIONE XXXV — *TEOREMA*.

67. *In ogni angolo solido la somma degli angoli piani è minore di quattro angoli retti* (fig. 22).

Dim. Sia S un angolo solido; si conduca un piano che incontri tutti i suoi spigoli: le intersezioni di questo piano colle facce dell'angolo solido formeranno il poligono $ABCDE$. Da un punto O preso dentro questo poligono si tirino le rette OA, OB, OC, OD, OE; vi saranno intorno al punto O tanti triangoli quanti sono quelli intorno al punto S; per conseguenza la somma di tutti gli angoli dei primi triangoli è uguale alla somma di tutti gli angoli dei secondi. Or nell'angolo triedro A formato dai tre piani EAB, EAS, BAS l'angolo piano EAB è minore della somma degli altri due; e similmente l'angolo piano ABC è minore degli angoli ABS, CBS, e così di tutti gli angoli del poligono $ABCDE$, dunque la somma degli angoli che stanno alle basi dei triangoli aventi il vertice comune O è minore della somma degli angoli alle basi dei triangoli che hanno il vertice comune S. Laonde per compensazione la somma degli angoli formati intorno al punto O dev'essere maggiore della somma degli angoli fatti intorno al punto S. Ma la prima somma è uguale a quattro angoli retti, dunque la seconda è minore di quattro retti. C. D. D.

PROPOSIZONE XXXVI — *PROBLEMA*.

68. *Se pel vertice di un angolo triedro si conducano tre piani respettivamente perpendicolari ai suoi spigoli, si formerà un altro angolo triedro, in guisa che gli angoli piani del primo saranno i supplementi degli angoli diedri del secondo, e reciprocamente* (fig. 23).

Dim. Sia $SABD$ un angolo triedro: pel punto S si conduca il pia-

no *asb* perpendicolare allo spigolo *SD*, il piano *aSd* perpendicolare allo spigolo *SB*, ed il piano *bSd* perpendicolare allo spigolo *SA* Questi tre piani determineranno un secondo angolo triedro *Sabd*, in modo che gli angoli piani *ASB*, *ASD*, *BSD* saranno i supplementi degli angoli che misurano gli angoli diedri *Sd*, *Sb*, *Sa*.

Infatti, essendo per costruzione lo spigolo *SD* perpendicolare al piano *aSb*, sarà pure perpendicolare alle rette *Sa*, *Sb* che passano pel suo piede in questo piano. Parimente lo spigolo *SB* essendo perpendicolare al piano *aSd*, sarà ancora perpendicolare alle rette *Sa*, *Sd* che passano pel suo piede in questo piano. Quindi la retta *Sa* è perpendicolare a un tempo agli spigoli *SD*, *SB*, e perciò al piano *DSB* che contiene questi due spigoli. Nello stesso modo si dimostrerà che *Sb* è perpendicolare al piano *ASD*, e che *Sd* è perpendicolare al piano *ASB*. Dunque gli angoli triedri *SABD*, *Sabd* son tali che gli spigoli dell' uno sono perpendicolari ai piani dell' altro, e viceversa.

Ciò premesso, da quanto si è dimostrato (n° 58) si desume che l'angolo *ASB* formato, dalle rette *SA*, *SB* rispettivamente perpendicolari ai piani *bSd*, *aSd* è supplemento dell'angolo diedro *aSab* compreso da questi piani; e reciprocamente l'angolo *aSdb* formato dalle rette *Sa*, *Sb* rispettivamente perpendicolari ai piani *SDB*, *SAD* sarà supplemento dell'angolo diedro *ASDB*. Lo stesso dicasi degli altri angoli piani, e degli angoli diedri corrispondenti nei due angoli solidi. *C. D. D.*

69. *Scolio.* La proprietà, di cui godono gli angoli triedri *SABD*, *Sabd*, ha fatto dare ad essi il nome di *angoli triedri supplementarj*.

PROPOSIZIONE XXXVII — *TEOREMA*.

70. *Se due angoli triedri hanno gli angoli piani respettivamente uguali, gli angoli diedri formati dai piani di questi angoli saranno essi pure uguali* (fig. 24).

Dim. Sieno *S*, *s* i due angoli triedri; e si supponga che gli angoli piani dinotati dalle stesse lettere sieno respettivamente uguali, cioè $ASB = asb$, $ASC = asc$ $BSC = bsc$.

Si prendano negli spigoli a partire dai vertici S, *s* le parti uguali *SA*, *SB*, *SC*, *sa*, *sb*, *sc*, e si conducano le rette *AB*, *BC*, *AC*, *ab*, *bc*, *ac*, Per un punto *E* dello spigolo *SB* s'innalzino a questo spigolo nelle facce *ASB*, e *CSB* le perpendicolari *EM*, *EN*, l'angolo *MEN* formato da queste perpendicolari sarà la misura dell'angolo diedro *ASBC* (n° 57). Or osservando che l'angolo *SBA* è acuto come angolo alla base del triangolo isoscele *ASB*. ne consegue che la obliqua *BA* deve incontrare la perpendicolare *EM*. Parimente la obliqua *BC* deve incontrare la perpendicolare *EN*.

Ciò premesso, si ripeta nel triedro *s* la costruzione precedente prendendo sullo spigolo *sb* una parte $se = SE$, l'angolo *men* sarà la misura dell'angolo diedro *asbc*, e sarà uguale all'angolo *MEN*.

Infatti, si conducano le rette MN, mn. Dalla ipotesi fatta qui sopra risultano uguali i triangoli ASB, asb, perciò sarà $AB=ab$. Parimente si dimostra che $BC=bc$, ed $AC=ac$; per conseguenza il triangolo ABC sarà uguale al triangolo abc. Da un'altra parte il triangolo MBE è uguale al triangolo mbe; poichè il lato $BE=be$, e gli angoli adiacenti a questi lati sono respettivamente uguali, onde sarà il lato $BM=bm$ ed $EM=em$. Similmente si dimostra che $BN=bn$, ed $EN=en$; e perciò il triangolo MNB è uguale al triangolo mnb, perchè l'angolo MBN compreso fra i lati BM, NB è uguale all'angolo mbn compreso fra i lati bm, bn in virtù della uguaglianza dei triangoli ABC, abc. Quindi sarà il lato $MN=mn$, ed il triangolo MNE risulterà equilatero al triangolo mne, e però infine sarà l'angolo MEN uguale all'angolo men. Dunque gli angoli diedri SB, sb sono uguali, e nello stesso modo si potrà dimostrare che l'angolo diedro $SA=sa$, e $SC=sc$. *C. D. D.*

71. *Scolio.* Nella dimostrazione precedente gli angoli piani dei due angoli solidi si sono considerati come similmente disposti, ma il teorema avrebbe luogo anche quando gli angoli piani accennati fossero disposti in ordine inverso, come negli angoli solidi $SABC$, $S'A'B'C'$, dove si ha l'angolo piano $ASC=A'S'C'$, $ASB=A'S'B'$, e $BSC=B'S'C'$. Infatti, se sopra gli spigoli si prendano le parti uguali SA, SB, SC, SA', SB', SC', indi si faccia $S'E'=SE$, e si ripeta sull'anglo solido S' la costruzione fatta nell'angolo solido S, si dimostrerà nello stesso modo che l'angolo $M'E'N'=MEN$.

PROPOSIZIONE XXXVIII — *TEOREMA.*

72. *Due angoli triedri, composti di angoli piani rispettivamente uguali e similmente disposti, sono uguali fra loro* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri S, s sia l'angolo $ASC=asc$, $ASB=asb$, e $BSC=bsc$, sarà facile dimostrare che questi due angoli triedri sono uguali fra loro. Infatti, se l'angolo asc si sovrapponga al suo uguale ASC, l'angolo asb dovrà coincidere col suo uguale ASB, poichè l'angolo diedro sa è uguale all'angolo diedro SA. Quindi i due angoli solidi coincideranno, e perciò saranno uguali fra loro. *C. D. D.*

73. *Scolio.* Quando gli angoli piani di due angoli triedri S, S', sono uguali rispettivamente, ma disposti in ordine inverso, non si può dimostrare la loro uguaglianza col principio della sovrapposizione. Perocchè, se si fa coincidere l'angolo $A'S'C'$ col suo uguale ASC in modo che lo spigolo $S'A'$ cada sopra SA, e $S'C'$ sopra SC, lo spigolo SB si troverà sul davanti del piano comune ASC, mentrechè lo spigolo $S'B'$ sarà situato dietro lo stesso piano; e però i due angoli solidi non combaceranno, ma si troveranno situati come nella fig. 26.

Che se poi (fig. 24) per far cadere lo spigolo $S'B'$ davanti il piano ASC si sovrapponga lo spigolo $S'C'$ allo spigolo SA, e $S'A'$ a

SC; in tal caso neppure può succedere la coincidenza dei due angoli solidi, poichè l'angolo diedro $S'C'$ non è uguale all'angolo diedro SA, ed oltracciò l'angolo piano $C'S'B'$ non è uguale all'angolo ASB.

I due angoli solidi si troveranno in questo secondo caso disposti come gli angoli $SABC$, $SAB''C$ della figura.

Dunque in ogni caso non si può dimostrare la uguaglianza degli angoli triedri S, S' colla sovrapposizione, ma bisogna ricavarla dalla uguaglianza dei loro elementi costituenti, non essendovi alcuna ragione perchè essi debbano differire l'uno dall' altro. Infatti, sono composti degli stessi angoli piani, e degli stessi angoli diedri, e la loro differenza consiste in una semplice trasposizione di parti, essendo gli angoli piani dell'uno disposti in ordine inverso agli angoli piani dell'altro.

Legendre, che fu primo a fare queste importanti osservazioni, ha chiamati *uguali per simmetria*, o più semplicemente *simmetrici* gli angoli triedri, di cui è parola, perchè li considera come costituiti rispetto ad un medesimo piano l uno da una parte, e l' altro dalla parte opposta, siccome si vede nella fig. 26.

Da tutto ciò segue che due angoli triedri, ed in generale due angoli solidi, si potranno chiamare *simmetrici* quando sono composti di angoli piani rispettivamente uguali e disposti in ordine inverso.

Nelle figure piane non vi può essere uguaglianza per simmetria, poichè si può rovesciare una figura piana, e prendere indifferentemente il di sopra per il di sotto; il che non può farsi nelle figure solide.

PROPOSIZIONE XXXIX. — *PROBLEMA*.

74. *Costruire un angolo triedro simmetrico ad un angolo triedro dato* (fig. 25).

Sol. Sia $SABC$ l'angolo solido dato. Si prolunghino gli spigoli AS BS, CS al di là del vertice S; l'angolo $SA'B'C'$ sarà il simmetrico di $SABC$. Infatti, gli angoli piani dei due triedri sono uguali ciascuno a ciascuno come opposti al vertice, ma sono disposti in ordine inverso, come è facile dimostrare. Imperciocchè, se si applica lo spigolo SA' sopra SA, e SC' sopra SC, lo spigolo SB' non potrà cadere sopra lo spigolo SB, perchè rispetto al piano comune ASC, lo spigolo SB si troverà davanti questo piano, e lo spigolo SB' dietro il piano medesimo. Che se si applichi lo spigolo SC' sopra SA, e SA' sopra SC, lo spigolo SB' caderà davanti il piano ASC, ma non potrà coincidere collo spigolo SB, poichè l'angolo $C'SB'$ non è uguale all'angolo ASB, ma bensì al suo verticale CSB. Dunque i due triedri $SABC$, $SA'B'C'$ sono simmetrici. *C. D. F.*

75. *Scolio* I. Supponiamo che per un punto qualunque s si conducano le rette sa, sb, sc, respettivamente parallele agli spigoli SA, SB, SC di un angolo triedro $SABC$, e secondo la stessa direzione rispetto ai punti s, S, si formerà un secondo angolo triedro $sabc$ ugua-

le al primo; dappoichè gli angoli piani *asb*, *asc*, *bsc* sono ugnali respettivamente agli angoli piani *ASB*, *ASC*, *BSC*, avendo i lati paralleli e rivolti dalla stessa parte (nº 32), e di più gli stessi angoli piani sono similmente disposti. Al contrario l'angolo solido *sabc* sarà simmetrico all'angolo solido *SA'B'C'*. Da ciò segue che se per un punto qualunque si conducano rette parallele agli spigoli di un angolo triedro, tutte rivolte dalla stessa parte degli spigoli dell'angolo triedro, si formerà un secondo angolo triedro uguale al primo; ma se poi le rette accennate sono tutte situate in direzione contraria, allora il secondo sarà simmetrico del primo.

76 *Scolio* II. Merita ancora di essere osservato che se un angolo triedro *sabc* situato comunque (fig. 26) si compone di angoli piani uguali rispettivamente a quelli dell'angolo triedro *SABC*, il primo potrà coincidere sia con *SABC*, sia col suo simmetrico *SAB'C*. Infatti, se si suppone che gli angoli piani dinotati dall'una e dall'altra parte colle stesse lettere siano uguali fra loro, e si ponga lo spigolo *sa* sopra *SA*, e lo spigolo *sc* sopra *SC*, ne risulta che essendo l'angolo diedro $csab = CSAB = CSAB'$, l'angolo piano *bsa* dovrà coincidere o coll'angolo piano *BSA*, o coll'angolo piano *B'SA* secondo che lo spigolo *sb* caderà davanti al piano *ASC*, o dietro questo medesimo piano. Quindi l'angolo triedro *sabc* coinciderà sia coll'angolo triedro *SABC*, sia coll'angolo triedro *SAB'C*. Da ciò si deduce che con tre angoli piani dati si possono al più formare due angoli triedri, simmetrici l'uno dell'altro, o in altri termini che un angolo triedro non può avere che un solo simmetrico.

PROPOSIZIONE XL — *TEOREMA*.

77. *Due angoli triedri che hanno gli angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno sono uguali, o simmetrici* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri *SABC*, *sabc* sia l'angolo diedro $SA = sa$, $SB = sb$, $SC = sc$; e si supponga che si sieno costruiti gli angoli triedri supplementarj (nº 68). Poichè nei due angoli solidi proposti gli angoli diedri sono uguali ciascuno a ciascuno, ne segue che gli angoli solidi supplementarj avranno gli angoli piani uguali ciascuno a ciascuno, e per conseguenza questi angoli solidi supplementarj, avranno ancora i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno. Ma gli angoli diedri degli angoli solidi supplementarj eguagliano ancora i corrispondenti angoli piani degli angoli solidi proposti; dunque gli angoli solidi proposti dovranno avere gli angoli piani uguali ciascuno a ciascuno, e però saranno o uguali, o simmetrici. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XLI — *TEOREMA*.

78. *Due angoli triedri che hanno un angolo diedro uguale compreso fra due angoli piani uguali ciascuno a ciascuno, sono uguali o simmetrici* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri S, s sia l'angolo diedro $SB = sb$, e gli angoli piani ASB, CSB rispettivamente uguali agli angoli piani asb, csb, è manifesto che se questi angoli piani sono disposti nello stesso ordine, i due angoli solidi possono coincidere. Ma se gli angoli piani sono disposti in ordine inverso, allora l'uno degli angoli solidi potrà coincidere col simmetrico dell'altro, e perciò saranno simmetrici. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XLII — *TEOREMA*.

79. *Due angoli triedri che hanno un angolo piano adiacente a due angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, sono uguali, o simmetrici* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri S, s sia l'angolo piano $ASC = asc$, l'angolo diedro $SA = sa$, e l'angolo diedro $SC = sc$. E' evidente che se gli angoli diedri accennati sono disposti nello stesso ordine, i due angoli solidi potranno coincidere, allorchè si sovrappongano l'uno all'altro. Ma se gli angoli diedri sono disposti in ordine inverso, allora uno degli angoli solidi proposti potrà coincidere col simmetrico dell'altro, e però saranno uguali nel primo caso, e simmetrici nel secondo. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XLIII — *TEOREMA*.

80. *Due angoli poliedri sono uguali fra loro allorchè sono composti di un medesimo numero di angoli triedri respettivamente uguali, e disposti nello stesso ordine* (fig. 27).

Dim. Negli angoli poliedri S, s sia l'angolo triedro $SABC$ uguale all'angolo triedro $sabc$, e l'angolo $SBCD$ uguale all'angolo $sbcd$, sarà facile dimostrare che l'angolo S è uguale all'angolo s. Infatti, gli angoli triedri $SABC$, $sabc$ possono coincidere, se si pongano convenientemente l'uno sull'altro. Parimente può coincidere l'angolo triedro $SBCD$ coll'angolo $sbcd$, e lo stesso dovrà dirsi di tutti gli angoli triedri omologhi, che vi potessero essere; per conseguenza i due angoli poliedri proposti coincideranno, ovvero saranno uguali. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XLIV — *TEOREMA*.

81. *Due angoli poliedri sono simmetrici fra loro quando sono composti di un medesimo numero di angoli triedri simmetrici, e disposti in ordine inverso*.

Dim. Imperocchè, questi angoli poliedri saranno composti di un medesimo numero di angoli piani respettivamente uguali, disposti in ordine inverso, e gli angoli diedri formati dai piani nei quali si

si trovano gli angoli uguali, saranno essi pure respettivamente uguali, perchè risultano dalla somma degli angoli diedri eguali appartenenti ai triedri parziali. *C. D. D.*

CAPITOLO VIII.

DEI SOLIDI TERMINATI DA SUPERFICIE PIANE.

82. Per formare un angolo solido vi vogliono almeno tre piani che si riuniscano in un solo e medesimo punto; ma per limitare lo spazio da per ogni dove vi bisogna un quarto piano che limiti lo spazio indefinito compreso fra le tre facce dell'angolo accennato. Quindi la più semplice delle figure solide terminate da piani è il *tetraedro* o solido a quattro facce; viene in seguito il *pentaedro*, o solido a cinque facce, l'*esaedro* che ne ha sei, l'*ottaedro* che ne ha otto, il *dodecaedro*, dodici, l'*icosaedro*, venti. In generale si dà il nome di *poliedro* ad ogni solido terminato da facce piane.

83. Le facce de'poliedri essendo poligoni, le intersezioni di questi poligoni si chiamano *lati*, *spigoli*, o *costole* del poliedro.

84 La *diagonale* di un poliedro è una linea retta che unisce due vertici non situati sulla medesima faccia.

85. Un poliedro si dice *convesso* quando la sua superficie non può essere incontrata da una linea retta in più di due punti. Di questa sola specie di poliedri si parla negli elementi, mettendo da parte quelli che hanno gli angoli solidi rientranti.

86. Dicesi *piramide* (fig. 22) un solido compreso fra più piani triangolari che partono da un medesimo punto S, e terminano ai differenti lati di un poligono $ABCDE$.

87. La piramide si può concepire come prodotta dal movimento di una linea retta indefinita, fissa in un punto S, ed obbligata a percorrere il perimetro di un poligono qualunque $ABCDE$.

88. Il punto S dicesi *vertice* della piramide, il poligono $ABCDE$ ne è la *base*, e la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della *base* ne è l'*altezza*. Finalmente il complesso dei tr'angoli ASB, BSC, CSD, ecc: forma la *superficie convessa* o *laterale* della piramide.

89. La piramide dicesi *triangolare*, *quadrangolare*, ecc:, secondochè la base è un triangolo, un quadrilatero, ecc.

90. Una piramide chiamasi *regolare* quando la sua base è un poligono regolare, e la sua altezza cade sul centro della base medesima. In questo caso l'altezza prende il nome di *asse* della piramide, e si appella *apotema* la perpendicolare abbassata dal vertice della piramide sopra un lato della sua base.

91 Sotto il nome di *piramide retta* intenderemo quella, in cui l'altezza non cade fuori della base. Chiameremo poi *piramide obliqua* quella, in cui l'altezza cade fuori della base.

92. Il *prisma* (fig. 29) è un solido compreso da più piani parallelogrammi terminati da una parte, e dall'altra da due poligoni u-

guali e paralleli, che si chiamano *basi* del prisma. Il complesso dei parallelogrammi accennati forma la *superficie convessa* o *laterale* del prisma.

93. Si può concepire il prisma come generato dal movimento di una retta AF che si mantiene parallela a se stessa e di costante lunghezza, mentre descrive colla sua estremità A il perimetro di un poligono qualunque $ABCDE$. Con questo medesimo movimento l'altra estremità F descrive il perimetro del poligono $FGHIK$ uguale e parallelo al poligono $ABCDE$.

94. L'*altezza* di un prisma è la distanza delle sue due basi, cioè la perpendicolare abbassata da un punto della base superiore sopra il piano della base inferiore.

95. Il prisma prende il nome di *triangolare*, *quadrangolare*, ecc: secondochè le sue basi sono triangoli, quadrilateri, ecc.

96. Un prisma dicesi *retto* quando i lati della superficie convessa sono perpendicolari alle basi. In questo caso i lati medesimi sono uguali all'altezza, ed i parallelogrammi, che formano la superficie convessa, sono rettangoli. Per lo contrario il prisma è *obliquo* allorchè i lati sono obliqui alle basi; nel qual caso essi lati sono maggiori dell'altezza.

97. Dicesi *parallelepipedo* il prisma, in cui le basi sono due parallelogrammi. Quindi il parallelepipedo è un solido compreso da sei facce parallelogrammiche (fig. 30).

98. Il parallelepipedo essendo un prisma, potrà essere per conseguenza *retto* o *obliquo*. Nel parallelepipedo retto quando la base è un rettangolo, tutte le facce sono rettangolari; e perciò si chiama *parallelepipedo rettangolo*. Finalmente tra i parallelepipedi rettangoli si distingue il *cubo*, che è un solido compreso da sei quadrati uguali.

99. Nella teorica dei poliedri si distinguono particolarmente le piramidi, ed i prismi, perchè sopra questi solidi tutta quella teorica viene appoggiata.

PROPOSIZIONE XLV — *TEOREMA*.

100. *Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla base, l'altezza, ed i lati saranno divisi in parti proporzionali; e la sezione sarà un poligono simile alla base* (fig. 28).

Dim. Sia la piramide $SABCD$ tagliata da un piano $abcd$ parallelo alla base; sia SO l'altezza della piramide, e si conducano le rette ao, AO.

1°. Le intersezioni ab, AB dei piani $abcd$, $ABCD$ col piano SAB essendo parallele (n° 33), sarà il triangolo Sab simile al triangolo SAB. Nello stesso modo si dimostra che il triangolo Sbc è simile al triangolo SBC, il triangolo Scd al triangolo SCD, ecc.; per conseguenza la ragione di Sa: SA sarà uguale a quella di Sb: SB, di Sc: SC, ecc. Ma da un'altra parte la ragione di Sa: SA è uguale a

quella dell'altezza, So all'altezza SO, poichè ao è parallela ad AO, dunque i lati SA, SB, SC, ecc., e l'altezza SO della piramide sono divisi in parti proporzionali.

2.° Per la simiglianza degli stessi triangoli si ha $ab : AB :: Sb : SB :: bc : BC$, dunque $ab : AB :: bc : BC$, e così pure si dimostra che $bc : BC :: cd : CD$, ecc. Quindi i poligoni $abcd$, $ABCD$ hanno i lati proporzionali; hanno di più gli angoli respettivamente uguali $a = A$, $b = B$, ecc., perchè sono compresi fra lati paralleli e rivolti nella stessa direzione, dunque il poligono $abcd$ è simile al poligono $ABCD$. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XLVI. — *TEOREMA.*

101. ***Le basi di due piramidi, che hanno la medesima altezza, stanno fra loro come le sezioni fatte da piani condotti nelle due piramidi parallelamente ad esse basi, ed ad uguale distanza dai vertici*** (fig. 28).

Dim. Sieno due piramidi S, e T, che abbiano le altezze uguali SO, TQ. Si faccia $Tq = So$, e pel punto q si conduca un piano parallelo alla base MNP, la sezione mnp sarà simile a questa base (n° 100). Parimente se pel punto o si conduca un piano parallelo alla base $ABCD$, la sezione $abcd$ sarà simile a questa base. Or essendo simili i poligoni $ABCD$, $abcd$, le loro aje staranno come i quadrati dei lati omologhi AB, ab, ovvero come i quadrati delle altezze SO, so (n° 100). Nello stesso modo si dimostra che i poligoni MNP, mnp stanno come i quadrati delle altezze TQ, Tq, ovvero come i quadrati di SO, so, dunque in fine si avrà

$ABCD : MNP :: abcd : mnp$. *C. D. D.*

102. *Corollario.* Da ciò segue che se le basi $ABCD$, MNP delle due piramidi sono equivalenti, le sezioni $abcd$, mnp fatte ad uguale altezza nelle stesse piramidi saranno equivalenti, e reciprocamente.

PROPOSIZIONE XLVII — *TEOREMA.*

103. ***Una piramide qualunque si può decomporre in piramidi triangolari*** (fig. 26).

Dim. Sia, per esempio, la piramide quadrangolare $SABCB'$. Si tiri la diagonale AC nella base della piramide, indi pel vertice S e per la diagonale medesima si faccia passare il piano ASC, è manifesto che questo piano dividerà la piramide proposta in due piramidi triangolari. Nello stesso modo, cioè tirando due diagonali nella base di una piramide pentagonale, si potrà divider questa in tre piramidi triangolari, e così in progresso. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XLVIII — *TEOREMA.*

104. ***Qualunque sezione fatta in un prisma da un piano parallelo alla base è uguale a questa base*** (fig. 29).

Dim. Si tagli il prisma *abck* con un piano parallelo alla base, il poligono *lmnpq* che ne risulta sarà uguale al poligono *abcde*. Infatti, le rette *lm*, *ab* sono uguali come parallele compreso fra parallele, e così pure si dimostra che *mn* è uguale e parallela a *bc*, *np* a *cd*. ec. Quindi i due poligoni avranno i lati uguali rispettivamente, ed anche gli angoli eguali, perchè compresi fra lati paralleli, e rivolti dalla stessa parte; e perciò sarà il poligono *lmnpq* uguale al poligono *abcde*. *C. D. D.*

105. *Corollario*. In qualunque prisma le sezioni fatte da piani paralleli fra loro sono uguali; dappoichè una di queste sezioni si può considerare come base di un prisma cui è parallela l'altra sezione.

106. *Scolio*. Ogni prisma poligono si può sempre decomporre in prismi triangolari, i quali hanno la medesima altezza del prisma, e le basi sono i differenti triangoli *ABC*, *ACD*, *ADE*, ecc., nè quali si può decomporre la base *ABCDE* per mezzo delle diagonali *AC*, *AD*.

PROPOSIZIONE XLIX — *TEOREMA*.

107. *In ogni parallelepipedo le facce opposte sono uguali e parallele, e gli angoli triedri opposti sono simmetrici* (fig. 30).

Dim. Sieno *ABCD*; *EGFH* le basi del parallelepipedo proposto, le quali (n° 97) sono parallelogrammi situati in piani paralleli. Or dico che due facce opposte qualunque *AE*, *DG* sono pure uguali e parallele. Perocchè, essendo *ABCD* un parallelogrammo, la retta *AB* è uguale e parallela a *CD*; parimente essendo *EBCG* un parallelogrammo, la retta *BE* è uguale e parallela a *CG*. Quindi gli angoli *ABE*, *DCG* hanno i lati paralleli e rivolti dalla stessa parte; perciò sono uguali, ed i loro piani sono paralleli (n° 42). Ma un parallelogrammo è determinato quando si conoscono due lati adiacenti e l'angolo da essi compreso, dunque il parallelogrammo *AE* è uguale a *DG*.

In secondo luogo, gli angoli triedri opposti, come *A*, e *G*, hanno gli spigoli paralleli ciascuno a ciascuno, ma non hanno la stessa direzione (n° 75), dunque sono simmetrici. *C. D. D.*

108. *Scolio*. Un prisma è determinato quando si conosce la base, e la retta generatrice; dunque un parallelepipedo sarà determinato allorchè si conoscerà uno dei suoi angoli triedri *B*, e le lunghezze de' lati *AB*, *BE*, *BC*.

PROPOSIZIONE L — *TEOREMA*.

109. *In ogni parallelepipedo le quattro diagonali si tagliano scambievolmente in due parti uguali nel medesimo punto* (fig. 31).

Dim. Per i due lati opposti *BF*, *DH* si faccia passare un piano; la sezione sarà il parallelogrammo *BFDH*; per conseguenza le diagonali *BH*, *FD* si taglieranno scambievolmente in due parti uguali

nel punto O. Or se per i lati opposti AD, FG si conduca un altro piano, la sezione $ADFG$ sarà pure un parallelogrammo, e la diagonale AG dividerà in due parti uguali la diagonale FD; e però la diagonale AG dovrà passare pel punto O. Si dimostrerà lo stesso per la diagonale EC; dunque le quattro diagonali del parallelepipedo si tagliano scambievolmente in due parti uguali nel medesimo punto O. C. D. D.

110. *Scolio*. Il punto O si chiama *centro* del parallelepipedo.

È manifesto che le rette tirate dal punto O a tutti i vertici del parallelepipedo, lo dividono in piramidi che hanno per vertice comune il punto O, e per basi le facce del parallelepipedo medesimo. E siccome ogni piramide si può decomporre in piramidi triangolari (n° 103), così ogni parallelepipedo si potrà decomporre in piramidi triangolari. Parimente prendendo un punto nell' interno di un poliedro, si potrebbe decomporlo in piramidi triangolari; ma essendo siffatta scomposizione molto importante, ne indicheremo un' altra nel teorema qui appresso.

PROPOSIZIONE LI — *TEOREMA*.

111. *Un poliedro convesso può sempre decomporsi in piramidi triangolari* (fig. 32).

Dim. Sieno SAB, $ABCD$, CDE tre facce consecutive di un poliedro. Se per uno dei vertici S si conducano delle linee rette a tutti gli altri, si determinerà una serie di piramidi $SABCD$, $SDCE$, ecc., che avranno per vertice comune il punto S, e per basi le differenti facce del poliedro, eccetto quelle che vanno a terminare al punto S. Il complesso di tutte queste piramidi formerà il poliedro medesimo: ma ogni piramide si può decomporre in piramidi triangolari, dunque ogni poliedro convesso può decomporsi in piramidi triangolari. C. D. D.

112. *Scolio*. Apparisce da questo teorema che siccome la teorica delle figure piane rettilinee si riduce a quella dei triangoli, così la teorica dei poliedri dovrà ridursi a quella delle piramidi triangolari. Nondimeno quest' ultima non potrebbe farsi rigorosamente, senza ricorrere ad alcune proprietà dei prismi, ed ecco perchè nella geometria solida si parla in modo speciale delle piramidi, e dei prismi, ed in un modo generale degli altri poliedri.

CAPITOLO IX.

DEI POLIEDRI UGUALI.

113 *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno tre facce respettivamente uguali, e similmente disposte* (fig. 24).

Dim. Sieno le due piramidi $SABC$, $sabc$, che abbiano le facce

SBA, *SBC*, *SCA* respettivamente uguali alle facce, *sba*, *sbc*, *sca*, e similmente disposte. Gli angoli tiedri S, e *s* saranno uguali, perchè sono composti di angoli piani uguali ciascuno a ciascuno e disposti nello stesso ordine (n° 72), per conseguenza gli angoli diedri *SA*, *SB*, *SC* saranno rispettivamente uguali agli angoli diedri *sa*, *sb*, *sc*. Quindi se si fanno coincidere gli angoli triedri accennati, risulterà manifesta la coincidenza delle due piramidi, che perciò saranno uguali. *C. D. D.*

114. *Corollario*. Da questo teorema si deduce evidentemente che due piramidi triangolari sono uguali allorchè hanno tutti i lati rispettivamente uguali e similmente disposti.

PROPOSIZIONE LIII — *TEOREMA*.

115. *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno un angolo diedro uguale, compreso fra due facce rispettivamente uguali e similmente disposte* (fig. 24).

Dim. Sieno *SABC*, *sabc* due piramidi triangolari, nelle quali sia l'angolo diedro *SB* uguale all'angolo diedro *sb*, e le facce *SBA*, *SBC* rispettivamente uguali alle facce *sba*, *sbc*, e similmente disposte. È chiaro che se si ponga la faccia *sba* sopra la sua uguale *SBA*, e l'angolo diedro *sb* sopra *SB*, la faccia *sbc* combacerà con la faccia *SBC*, e però risulta manifesta la uguaglianza delle due piramidi. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LIV — *TEOREMA*.

116. *Due piramidi triangolari sono uguali, quando hanno una faccia uguale adiacente a tre angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, e similmente disposti* (fig. 24).

Dim. Sieno *SABC*, *sabc* due piramidi triangolari, che abbiano le facce *ABC*, *abc* uguali fra loro, come pure gli angoli diedri adiacenti a queste facce. Se si fanno combaciare le facce *ABC*, *abc*, la faccia *asb* si troverà nel piano della faccia *ASB*, ed il punto *s* cadrà in un punto di questo piano. Parimente, la faccia *asc* si troverà nel piano della faccia *ASC*, ed il punto *s* cadrà in un punto di questo piano. Nello stesso modo ancora si dimostrerà che la faccia *bsc* sarà situata nel piano della faccia *BSC*, e che il punto *s* cadrà in un punto di questo piano; per conseguenza il punto *s* dovendosi trovare a un tempo nei tre piani *ASB*, *ASC*, *BSC*, si troverà nel punto *s* del loro incontro. Quindi le due piramidi triangolari coincideranno, e perciò saranno uguali *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LV — *TEOREMA*.

117. *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno una costola uguale, e tutti i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, e similmente disposti* (fig. 24).

Dim. Sieno $SABC$, $sabc$ due piramidi triangolari, nelle quali sieno uguali gli spigoli SA, sa, come pure tutti gli angoli diedri similmente situati. Gli angoli triedri S, s sono uguali, poichè hanno i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti (n° 77); per conseguenza i loro angoli piani ASB, asb sono eguali, come pure gli angoli ASC, asc. Per la stessa ragione sono uguali gli angoli triedri A, a, ed in conseguenza gli angoli SAB, sab, e gli angoli SAC, sac. Quindi i triangoli ASB, asb sono uguali, perchè hanno il lato SA uguale al lato sa, e sono uguali gli angoli adiacenti a questi lati ciascuno a ciascuno: lo stesso si verifica per i due triangoli ASC, asc. Dunque le due piramidi proposte hanno un angolo diedro uguale $BASC = basc$ compreso fra due facce uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte; perciò queste due piramidi sono uguali (n° 115) *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LVI — *TEOREMA*.

118. ***Due piramidi sono uguali quando hanno basi uguali, e due facce contigue alla prima di queste basi uguali rispettivamente a due facce contigue alla seconda, e similmente disposte*** (fig. 27).

Dim. Sieno $SABDC$, $sabcd$ due piramidi, che abbiano le basi uguali $ABCD$, $abcd$ e le facce contigue ASB, BSD rispettivamente uguali alle facce contigue asb, bsd, e similmente disposte. Si tirino le diagonali AD, ad, le due piramidi saranno decomposte in piramidi triangolari dai piani SAD, sad. Or in virtù della uguaglianza dei poligoni $ABCD$, $abcd$, saranno uguali i triangoli ABD, abd; per conseguenza le piramidi triangolari $SABD$, $sabd$ avranno tre facce uguali ciascuna a ciascuna e similmente situate, onde saranno uguali fra loro (n° 113). Quindi se si fanno coincidere i poligoni $ABCD$, $abcd$, i triangoli ABD, abd coincideranno, come pure le piramidi triangolari uguali $SABD$, $sabd$; e però le due piramidi avranno tutti i loro vertici comuni, e coincideranno in tutta la loro estensione. Dunque queste piramidi sono uguali. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LVII — *TEOREMA*.

119. ***Due prismi sono uguali, quando hanno una base e due facce contigue uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte*** (fig. 29).

Dim. Nei prismi AK, ak sia la base $ABCDE$ uguale alla base $abcde$, la faccia $ABGF$ uguale alla faccia $abgf$, e la faccia $BCHG$ uguale alla faccia $bchg$. Gli angoli triedri B, b sono uguali, poichè hanno gli angoli piani rispettivamente uguali, e similmente disposti; perciò posta la base $abcde$ sopra la base $ABCDE$, lo spigolo bg coinciderà collo spigolo BG, la faccia $bchg$ colla faccia $BCHG$, e la faccia $abgf$ colla faccia $ABGF$. Quindi i punti f, g, h caderanno rispet-

tivamente su i punti F, G, H; ma per tre punti non in linea retta può passare un solo piano; dunque il poligono *fghik* combacerà col suo uguale $FGHIK$, e gli spigoli *id*, *ke* coincideranno essi pure cogli spigoli ID, KE. Laonde i due prismi sono uguali. *C. D. D.*

120. *Corollario. Due prismi retti sono uguali quando hanno basi uguali, ed uguali altezze;* dappoichè in tal caso le loro facce rettangolari sono uguali a due a due, avendo uguali basi, ed uguali altezze.

PROPOSIZIONE LVIII — *TEOREMA*.

121. *Il piano che passa per le diagonali corrispondenti delle due basi di un parallelepipedo retto, lo divide in due prismi triangolari uguali fra loro* (fig. 30).

Dim. Sia il parallepipedo retto AG, e sieno $ABCD$, $EGFH$ le sue basi. Essendo lo spigolo EB uguale e parallelo allo spigolo FD (n° 97), se si conducano le diagonali BD, EF delle due basi, la figura $EBDF$ sarà un rettangolo; poichè per ipotesi il parallelepipedo AG è retto, e per conseguenza gli spigoli EB, FD sono perpendicolari alle basi. Quindi i due solidi $ABDEFH$, e $BCDEGF$ sono prismi triangolari retti che hanno uguali basi, ed uguali altezze, e perciò sono uguali fra loro (n° 120). *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LIX — *TEOREMA*.

122. *Due poliedri S, s sono uguali, allorchè possono decomporsi in un medesimo numero di piramidi uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte* (fig. 32).

Dim. Infatti, se si fanno coincidere due di queste piramidi $SABC$, *sabc*, supposte uguali, le piramidi vicine coincideranno con una faccia; e siccome esse sono uguali per ipotesi, e similmente disposte, così coincideranno in tutta la loro estensione. Lo stesso avrà luogo progressivamente per tutte le piramidi prese a due a due, e però i poliedri medesimi coincideranno. *C. D. D.*

123. *Scolio.* La reciproca di questa proposizione è evidente, cioè che due poliedri uguali possono decomporsi in un medesimo numero di piramidi uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte. *C. D. D.*

PROPOSIZONE LX — *TEOREMA*.

124. *Due poliedri sono uguali quando hanno le facce rispettivamente uguali e similmente disposte, e ciascun angolo diedro di due facce contigue in uno di essi uguale all'angolo diedro delle facce omologhe nell'altro* (fig. 32).

Dim. Imperocchè, se nei due poliedri si considerano due piramidi triangolari omologhe esterne $SABC$, *sabc*, si vedrà che esse

sono uguali, poichè hanno un angolo diedro uguale compreso fra facce respettivamente uguali, e similmente situate. Quindi se dai due poliedri si tolgano queste piramidi, si avranno altri due poliedri, nei quali le nuove facce saranno rispettivamente uguali, e saranno pure rispettivamente uguali i nuovi angoli diedri. Dunque si potrà operare sopra questi nuovi poliedri come sopra i precedenti, e così progredendo si potranno decomporre i due poliedri in un medesimo numero di piramidi triangolari uguali e similmente disposte; e però questi poliedri saranno uguali. *C. D. D.*

125. *Scolio.* La reciproca della proposizione precedente è manifesta, cioè che due poliedri uguali hanno le facce omologhe rispettivamente uguali e similmente disposte, e ciascun angolo diedro di due facce contigue in uno di questi poliedri uguale all' angolo diedro delle facce omologhe nell'altro (*).

CAPITOLO X.

DEI POLIEDRI EQUIVALENTI.

126. Lo spazio compreso dalla superficie di un solido dicesi *solidità* o *volume*.

127. Due solidi si chiamano *equivalenti* quando hanno il medesimo volume, ma non possono coincidere.

128. Misurare il volume di un solido significa determinare il suo rapporto col volume di un altro solido di nota grandezza che si prende per *unità di volume*.

129. Per unità di volume si è prescelto quello di un cubo, cui si dà per spigolo l'unità di lunghezza. Così se l'unità di lunghezza è il palmo, l'unità di volume sarà un cubo, il cui spigolo è un palmo, e che perciò si chiama *palmo cubico*. Se l'unità di lunghezza è la canna, l'unità di volume sara un cubo, il cui spigolo è una canna, e si chiama *canna cubica*, e così in progresso.

230. Sotto il nome di *dimensioni di un parallelepipedo rettangolo* s'intendono le tre rette che rappresentano la sua altezza, e le due dimensioni della sua base, cioè la lunghezza, e la larghezza.

131. Alle denominazioni *larghezza*, ed *altezza* si sostituiscono talvolta quelle di *grossezza*, e di *profondità*. Così si dice, per esempio, la lunghezza e l'altezza di un edifizio; la lunghezza, l'altezza, e la grossezza di un muro; la lunghezza, la larghezza, e la grossezza di una tavola; la lunghezza, la larghezza, e la profondità di un fosso, ecc.

(*) Euclide ha messo come definizione che due poliedri sono uguali, quando sono compresi da un medesimo numero di piani uguali ciascuno a ciascuno. Lungi dall'essere una definizione è questo un teorema difficilissimo a dimostrarsi, e fortunatamente non è necessario negli elementi. La dimostrazione fattane dal celebre geometra Cauchy potrà leggersi nelle note alla geometria di Legendre.

132. Si è dato il nome di *dimensioni* alla lunghezza, larghezza, ed altezza di un parallelepipedo rettangolo, perchè esse misurano l'estensione di questo solido nelle sue tre direzioni principali. Infatti, l'estensione di un parallelepipedo rettangolo è uniforme nella direzione di ciascuna delle sue tre dimensioni; dappoichè essa è limitata da due piani paralleli, ambidue perpendicolari allo spigolo che misura questa dimensione. Siffatta disposizione particolare al parallelepipedo rettangolo non esiste più negli altri solidi; non pertanto si adopera ancora la parola *dimensione* per indicare le tre *direzioni* principali della loro estensione, abbenchè la maggior parte di questi solidi non abbia, propriamente parlando, nè lunghezza, nè larghezza, nè altezza assegnabili effettivamente. Si può ora comprendere perchè siasi prescelto il cubo per unità di volume dei solidi.

PROPOSIZIONE LXI — *TEOREMA.*

133. *Il parallelepipedo rettangolo ha per misura il prodotto delle sue tre dimensioni* (fig. 33).

Dim. Sia *MB* il parallelepipedo rettangolo proposto. Supponiamo per fissare le idee, che lo spigolo *AB* contenga 6 volte l'unità di lunghezza *ab*, e che gli spigoli *AD*, ed *AC* la contengano rispettivamente 4 volte, e 7 volte.

Si divida *AB* in 6 parti uguali, e per tutti i punti di divisione si conducano altrettanti piani perpendicolari ad *AB*: parimente si divida *AD* in 4 parti uguali, e per tutti i punti di divisione si conducano i piani perpendicolari ad *AD*: finalmente si divide *AC* in 7 parti uguali, e per tutti i punti di divisione si conducano i piani perpendicolari ad *AC*.

È manifesto che con questa costruzione il parallelepipedo *BM* si troverà decomposto in piccoli parallelepipedi rettangoli, che avranno tutti le loro tre dimensioni uguali alla unità di lunghezza *ab*, perchè due piani perpendicolari ad una medesima retta sono paralleli fra loro (n° 25). Dunque questi piccoli parallelepipedi sono cubi, dei quali ciascuno ha per spigolo l'unità di lunghezza, e perciò è una unità di volume. Or è evidente che il numero di tutti questi cubi corrisponde al prodotto dei numeri 4, 6, e 7, cioè 168; dunque se gli spigoli *AB*, *AD*, *AC* sono commensurabili coll'unità di lunghezza *ab*, il parallelepipedo rettangolo *BM* avrà per misura il prodotto delle sue tre dimensioni.

Suppongasi in secondo luogo che due spigoli soltanto *AB*, ed *AD*, sieno commensurabili coll'unità di lunghezza *ab*, dico che anche in questo caso il volume del parallelepipedo *BM* sarà espresso dal prodotto dei tre spigoli *AB*, *AD*, *AC*. Infatti, si supponga, se è possibile, che il volume accennato sia espresso dal prodotto $AB \times AD$ per un terzo spigolo *AO* minore di *AC*. Si prenda una parte aliquota di *ab* che sia minore di *OC*, e si tolga dallo spigolo *AC* tante volte quante si può, si avrà un residuo *CL* minore di *OC*; pel punto *L* si conduca un piano

parallelo alla base ABD del parallelepipedo proposto. Il parallelepipedo BN che ne risulta avrà per misura il prodotto dei tre spigoli AB, AD, AL, poichè questi spigoli sono commensurabili coll'unità di lunghezza. Ma per ipotesi il prodotto degli spigoli AB, AD, AO è la misura del parallelepipedo BM, dunque il parallelepipedo BN dovrebbe essere maggiore del parallelepipedo BM; il che è assurdo. Nello stesso modo si dimostrerebbe che il volume del parallelepipedo BM non può essere espresso dal prodotto $AB \times AD$ per un terzo spigolo maggiore di AC.

In terzo luogo sia il solo spigolo AD commensurabile con ab, e si supponga che il volume del parallelepipedo BM sia espresso da $AB \times AD$ per un terzo spigolo minore di AC. Si faccia la costruzione sopraccennata, e sarà il parallelepipedo BN espresso dal prodotto dei tre spigoli AB, AD, AL, poichè AD, ed AL sono commensurabili coll'unità di lunghezza. Laonde il parallelepipedo BN sarebbe maggiore del parallelepipedo BM; il che non può sussistere.

Finalmente se tutti e tre gli spigoli sono incommensurabili coll'unità di lunghezza, si farà la stessa costruzione adoperata nei due casi precedenti, e si dimostrerà nello stesso modo che il parallelepipedo BN, che in questo caso avrebbe un solo spigolo commensurabile AL, sarebbe maggiore di BM. Dunque in ogni caso il parallelepipedo rettangolo ha per misura il prodotto delle sue tre dimensioni. *C. D. D.*

134. *Scolio.* Quando si dice che il parallelepipedo rettangolo BM ha per misura il prodotto delle sue tre dimensioni, si fa uso di una espressione abbreviata, colla quale si vuole intendere che il parallelepipedo proposto BM sta al cubo bm, che è l'unità di volume, come il numero astratto risultante dal prodotto delle tre linee AB, AD, AC all unità di lunghezza ab. Or siccome il prodotto di AB moltiplicata per AD rappresenta l'aja del rettangolo ABD, così se si prenda questo rettangolo per base del parallelepipedo, lo spigolo AC ne sarà l' altezza; e però si può dire che: *il parallelepipedo rettangolo ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

Parlando a rigore, è impossibile moltiplicare una superficie per una linea, ma questo modo di dire è una espressione abbreviata, colla quale si dee intendere che il numero astratto delle unità quadrate della base del parallelepipedo moltiplicato pel numero astratto delle unità lineare dell' altezza dà per prodotto un altro numero pure astratto, il quale esprime il rapporto del parallelepipedo proposto al cubo, ch' è l' unità di volume.

135. *Corollario* I. Se il parallelepipedo rettangolo è un cubo, se ne avrà la misura prendendo il numero delle unità di lunghezza contenute in uno dei suoi spigoli, e formando un prodotto in cui questo numero entri tre volte come fattore. Così, se lo spigolo del cubo proposto contiene 2 unità di lunghezza, questo cubo conterrà 8 unità di volume. Ed ecco perchè in aritmetica si è dato il nome di cubo al prodotto di tre fattori uguali.

136. *Corollario* II. Due parallelepipedi rettangoli che hanno ba-

si equivalenti, ed altezze uguali, sono equivalenti, dappoichè hanno la stessa misura.

137. *Corollario* III. Due parallelepipedi rettangoli che hanno le basi in ragion reciproca delle altezze. sono equivalenti.

138. *Corollario* IV. Due paralleledipedi rettangoli che hanno la stessa altezza, stanno fra loro come le basi. Viceversa, se hanno uguali basi, o basi equivalenti, stanno fra loro come le altezze.

139. *Corollario* V. Due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro tre dimensioni, ovvero come i prodotti delle basi moltiplicate per le altezze, o finalmente in ragione composta dalla ragione delle basi, e dalla ragione delle altezze.

PROPOSIZIONE LXII — *TEOREMA*.

140. *Ogni parallelepipedo retto e equivalente ad un parallelepipedo rettangolo che ha la stessa altezza, ed una base equivalente.* (fig. 34).

Dim. Sia AL un parallelepipedo retto, di cui la base è il parallelogrammo $ABCD$. Dai punti A, e B si abbassino sopra DC le perpendicolari AO, BN, indi dai punti O, e C s'innalzino sopra DC nel piano $MDCL$ le perpendicolari OQ, NP, e finalmente si tirino le rette IQ, KP. Con qnesta costruzione si avrà il solido AP, che sarà un parallelepipedo rettangolo equivalente al parallelepipedo proposto. Infatti, la base $ABNO$ è nn rettangolo eqnivalente al parallelogrammo $ABCD$; parimente la base superiore $IKPQ$ è un rettangolo equivalente al parallelogrammo $IKLM$. Di più, le facce laterali del solido AP sono pure rettangolari; dappoichè essendo MD perpendicolare al piano della base $ABCD$ del parallelepipedo retto , le linee QO, NP parallele a MD saranno pure perpendicolari al piano medesimo (n° 24) ; ma gli spigoli IA, KB sono essi ancora perpendicolari al piano accennato, dunqne il solido AP è un parallelepipedo rettangolo. Or da nn' altra parte i due prismi triangolari retti AM, BL sono uguali, poichè le basi ADO, BCN sono uguali, come pure le altezze DM, NP (n° 120): dunque se a qnesti due prismi si aggiunge di comnne il solido $ABCOIKLQ$, il parallelepipedo retto AL risulterà equivalente al parallelepipedo rettangolo AP. C.D.D.

141. *Corollario* I. Dalla proposizione precedente si deduce che *Il parallelepipedo retto ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

142. *Corollario* II. Due parallelepipedi retti che hanno le basi equivalenti, e le altezze uguali, sono equivalenti.

143. *Corollario* III. Il prisma triangolare retto $BCDF$ (fig. 30) ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.

Infatti, il prisma triangolare retto $BCDF$ è metà (n° 121) del parallelepipedo retto CH che ha una base doppia e la stessa altezza.

144. *Corollario* IV. Dal corollario precedente apparisce che *Due prismi triangolari retti sono equivalenti, quando hanno basi equivalenti, ed altezze uguali.*

PROPOSIZIONE LXIII — *TEOREMA*.

145. *Due piramidi triangolari rette che hanno basi equivalenti, ed altezze uguali, sono equivalenti.* (fig. 35).

Dim. Sieno *SABC*, *sabc* due piramidi triangolari rette. Si supponga che le basi *ABC*, *abc* sieno situate in un medesimo piano, e che l' altezza della prima piramide si confonda collo spigolo *SA*, e l'altezza della seconda cada sul lato *ac* della base *abc* ; poichè se cadesse dentro di questa base, la dimostrazione seguente resterebbe sempre la stessa.

Si chiamino *P*, e *p* i volumi delle due piramidi : se queste piramidi non sono equivalenti, sia *sabc* la più piccola. Sarà sempre possibile, prendendo un' altezza conveniente *Ax*, costruire un prisma retto avente per base il triangolo *ABC*, di cui il volume sia uguale alla differenza *P—p* dei volumi delle due piramidi proposte.

Si divida l' altezza *SA* in parti uguali minori di *Ax*, e per i punti di divisione *D*, *G*, *K*, ecc. si conducano altrettanti piani paralleli al piano delle basi; le sezioni fatte da ciascuno di questi piani nelle due piramidi saranno equivalenti (n° 142), onde si avrà *DEF* = *def*, *GHI* = *ghi*, ecc.

Ciò premesso, sopra i triangoli *ABC*, *DEF*, *GHI*, ecc. presi per basi si costruiscano i prismi retti esterni *ABCN*, *DEFO*, *GHIP*, ecc., che abbiano per altezze le parti *AD*, *DG*, *GK* , ecc. dell' altezza *SA*. Parimente sopra i triangoli *def*, *ghi*, *klm*, ecc. presi per basi si costruiscano nella seconda piramide i prismi retti interni *defo*, *ghip*; ec. dei quali le altezze saranno uguali alle altezze *AD*, *DG*, *GK*, ec. dei prismi esterni appartenenti alla prima piramide. Quindi tutti i prismi fin qui mentovati avranno per altezza comune *AD*.

La somma de' prismi esterni della piramide *SABC* è maggiore del volume di questa piramide; al contrario la somma de' prismi interni della piramide *sabc* è minore del volume di questa piramide ; dunque per queste due ragioni, se si chiami *S* la somma de' prismi esterni , e *s* quella degli interni , dovrà essere la differenza *S—s* maggiore della differenza *P—p*.

Or a partire dalle basi *ABC* , *abc* , il secondo prisma esterno *DEFO* è equivalente al primo prisma interno defo (n° 142), poichè hanno basi equivalenti ed altezze uguali ; sono equivalenti per la stessa ragione il terzo prisma esterno *GHIP* ed il secondo interno *ghip*, il quarto esterno ed il terzo interno, e così in progresso fino all' ultimo degli uni e degli altri. Dunque tutti i prismi esterni della piramide *SABC*, eccetto il primo *ABCN*, hanno i loro equivalenti ne' prismi interni della piramide *sabc*; per conseguenza la differenza *S—s* sarà uguale al prisma accennato *ABCN*. Ma per costruzione la differenza *P—p* delle due piramidi è maggiore del prisma *ABCN*, dunque la differenza *S—s* dei prismi sarà minore della differenza *P—p* delle piramidi; il che è assurdo, perchè più sopra si è dimostrata maggiore: dunque la piramide *SABC* non può essere

Ciò premesso, per i tre punti C, D, E si faccia passare un piano, questo dividerà la piramide quadrangolare $EBCFD$ in due piramidi triangolari equivalenti $EBCD$, $ECFD$, poichè hanno basi uguali, e la stessa altezza, cioè la perpendicolare abbassata dal vertice comune D sul piano $EBCF$. Or considerando la piramide $ECFD$ come se avesse per base il triangolo EDF, e per vertice il punto C, ne segue che le due piramidi $ECDF$, $ABCD$ avranno basi uguali, ed altezze uguali; perciò queste due piramidi saranno uguali, ed il prisma triangolare sarà decomposto nelle tre piramidi triangolari equivalenti fra loro $ABCD$, $EBCD$, $ECFD$. Laonde la piramide proposta $ABCD$ sarà la terza parte del prisma AE. C. D. D.

149. *Corollario* I. *Due prismi triangolari che hanno le basi equivalenti, e le altezze uguali, sono equivalenti, perchè le piramidi loro terze parti sono equivalenti* (n.° 145).

150. *Corollario* II. Dal corollario precedente si deduce che un prisma triangolare obliquo è equivalente ad un prisma triangolare retto di base equivalente e della stessa altezza, ma il prisma triangolare retto ha per misura il prodotto della base per l'altezza (n° 143); per conseguenza: *ogni prisma triangolare ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

151. *Corollario* III. Ma la piramide triangolare è la terza parte del prisma triagolare della stessa base, e della stessa altezza, dunque *Ogni piramide triangolare ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza.*

152. *Corollario* IV. Potendosi ogni prisma poligono decomporre in prismi triangolari dellla stessa altezza (n° 106): ed ogni piramide poligona in piramidi triangolari della stessa altezza (n° 103) ne consegue che

1°. *Ogni prisma ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

2°. *Ogni piramide ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza; e per conseguenza.*

3° *Ogni piramide è la terza parte del prisma della stessa base e della stessa altezza.*

PROPOSIZIONE LXVI — *TEOREMA*.

153. *Il piano che passa per la diagonali corrispondenti di due facce opposte di un parallelepipedo obliquo, lo divide in due prismi triangolari equivalenti* (fig. 30).

Dim. Sia il parallelepipedo obliquo CH, e per le diagonali corrispondenti EF, BD di due facce opposte qualunque si faccia passare il piano $EBDF$, il quale dividerà il parallelepipedo proposto nei due solidi $ABDH$, $BDCG$. In primo luogo questi due solidi sono prismi triangolari; poichè i triangoli ABD, EFH, avendo i loro lati uguali e paralleli, sono uguali fra loro, e nel tempo stesso le facce laterali sono tre parallelogrammi. Quindi il solido $ABDH$ è

un prisma triangolare, e lo stesso si dimostra pel solido $BDCG$.

In secondo luogo, i due prismi triangolari accennati sono equivalenti, perchè hanno basi uguali ed altezze uguali (n° 149), dunque il piano $EBDF$ divide il parallelepipedo obliquo in due prismi equivalenti. *C. D. D.*

154. *Corollario* I. Poichè il prisma triangolare ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza (n° 150), apparisce dalla proposizione precedente che

Un parallelepipedo qualunque ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza; e per conseguenza

155. *Corollario* II *Due parallelepipedi qualunque che hanno basi equivalenti, ed altezze eguali sono equivalenti.*

Da che si conchiude ancora che due parallelepipedi sono equivalenti, se hanno la stessa base, o basi equivalenti, e sono come nella fig. 37 situati fra gli stessi piani paralleli; per la qual cosa si potrà sempre trasformare un parallelepipedo obliquo qualunque in un parallepipedo rettangolo equivalente.

156. *Scolio*. Tutti i teoremi ricavati (n° 136 al n° 139) come corollarj della misura del parallelepipedo rettangolo si possono applicare a due parallelepipedi qualunque, a due prismi qualunque, ed anche a due piramidi qualunque. Ciò risulta da quanto fin qui si è esposto.

PROPOSIZIONE LXVII — *TEOREMA*.

157. *Se una piramide triangolare si tagli con un piano parallelo alla base, il tronco che resta togliendo la piccola piramide è equivalente alla somma di tre piramidi, che hanno per comune altezza quella del tronco, e per basi l'una la base inferiore del tronco, l'altra la base superiore, e l'ultima una media proporzionale fra queste due basi* (fig. 38).

Dim. Sia $ABCDEF$ un tronco di piramide triangolare. Per i punti A, E, C si faccia passare un piano, il quale distaccherà dal tronco la piramide triangolare $ABCE$ che ha per base la base inferiore del tronco, e per altezza l'altezza del tronco medesimo; poichè il vertice E si ritrova nel piano DEF: questa è la prima delle tre piramidi.

Rimane la piramide quadrangolare che ha per vertice il punto E, e per base il trapezio $DACF$. Per i tre punti D, E, C si faccia passare un piano, che dividerà la piramide accennata in due piramidi triangolari. La prima $EDFC$ può considerarsi come avente per base il triangolo DEF e per vertice il punto C, per conseguenza avrà per base la base superiore del tronco, e la stessa altezza di esso. Dunque è questa la seconda piramide.

In quanto alla piramide $EDAC$, a fine di trasformarla in un'altra equivalente, si conduca pel punto E nel piano $ADEB$ la retta EK parallela ad AD, e si uniscano DK, e KC. La piramide $EDAC$ è equivalente alla piramide $ADCK$, perchè hanno la stessa base ADC, e la

stessa altezza, essendo i loro vertici situati in una retta EK parallela ad AD, ovvero al piano ADC. Ma la piramide $DACK$ può considerarsi come se avesse per base il triangolo AKC, e per vertice il punto D, resta dunque a dimostrare che la base AKC è media proporzionale fra le due basi del tronco. Infatti, essendo le rette DE, DF respettivamente parallele ad AB, AC, e rivolte dalla stessa parte, sarà l'angolo EDF uguale all'angolo BAC. Ma $DE = AK$, se dunque si considerano DF, ed AC come basi dei triangoli DEF, AKC, le perpendicolari abbassate dai vertici E, K su queste basi; ovvero le altezze dei due triangoli saranno uguali; e però i triangoli DEF, AKC staranno come le basi DF, AC. Ma i triangoli AKC, ABC stanno ancora come le basi AK, AB, ovvero come DE, AB, perchè hanno la stessa altezza; e per la simiglianza dei triangoli DEF, ABC si ha $DF : AC :: DE : AB$ dunque in fine sarà
$DEF : AKC :: AKC : ABC$. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXVIII — *TEOREMA.*

158. *Il tronco a basi parallele di una piramide qualunque è equivalente alla somma di tre piramidi, che hanno per comune altezza quella del tronco, e per basi la base inferiore del tronco, la base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi* (fig. 28).

Dim. Sia S una piramide qualunque, T una piramide triangolare: si supponga che le basi $ABCD$, MNP sieno equivalenti, e situate in un medesimo piano; e che le altezze SO, TQ sieno uguali fra loro; indi si conduca un piano parallelo a quello delle basi che tagli le due piramidi.

Essendo per ipotesi le basi equivalenti, le sezioni $abcd$, mnp saranno ancora equivalenti (n° 102); per conseguenza le piramidi parziali $Sabcd$ $Tmnp$ saranno equivalenti. Ma le piramidi intere sono equivalenti, perchè hanno basi equivalenti, ed altezze uguali, dunque il tronco della piramide poligona è equivalente al tronco della piramide triangolare; e però il tronco di una piramide qualunque si potrà decomporre in tre piramidi, come nella enunciazione del teorema. *C. D. D.*

159 *Corollario.* Da ciò si deduce che

Il tronco di piramide a basi parallele ha per misura il terzo del prodotto della sua altezza per la somma delle sue due basi e di una media proporzionale fra queste due basi.

PROPOSIZIONE LXIX — *TEOREMA.*

160. *Se si taglia un prisma triangolare con un piano inclinato alla base, il tronco sarà uguale alla somma di tre piramidi, che hanno per base comune la base inferiore del tronco, e per vertici quelli della base superiore* (fig. 39).

Dim. Sia *ABCDEF* un tronco di prisma triangolare. Per i punti *A*, *E*, *C* si faccia passare un piano, il quale distaccherà dal tronco la piramide triangolare *ABCE*, che ha per base la base inferiore del tronco, e per vertice il punto *E* della base superiore.

Per i punti *D*, *E*, *C* si faccia passare un piano, il quale dividerà la piramide quadrangolare *EADFC* in due piramidi triangolari. La prima *EDAC* avendo per base il triangolo *DAC*, e per vertice il punto *E*, sarà equivalente alla piramide *DACB*, che ha la stessa base, e la stessa altezza, essendo i vertici *E*, *B* situati nella retta *EB* parallela al piano *DAC*. Ma la piramide *DACB* può considerarsi come se avesse per base il triangolo *ABC*, e per vertice il punto *D*, dunque si ha la seconda piramide.

Rimane ora a considerare la piramide *EDFC*, la quale è equivalente alla piramide *AEFC*, poichè hanno la stessa base *ECF*, e la stessa altezza, essendo i vertici *D*, *A* situati nella retta *DA* parallela al piano *ECF*. Ma la piramide *AEFC* può considerarsi come se avesse per base il triangolo *ACF*, e per vertice il punto *E*, e perciò è equivalente alla piramide *ACFB*. che ha la stessa base e la stessa altezza, dunque la piramide *ECFD* è equivalente alla piramide *ACFB* la quale sarà la terza piramide richiesta, perchè si può considerare come se avesse per base il triangolo *ABC*; e per vertice il punto *F*. *C*. *D*. *D*.

161 *Corollario*. Dal teorema precedente s'inferisce che

Il prisma triangolare troncato ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della somma delle tre perpendicolari abbassate su questa base dai vertici opposti.

162. *Scolio*. Quando si ha un tronco di prisma triangolare retto, le perpendicolari abbassate dai vertici, *D*, *E*, *F* sulla base *ABC* si confondono cogli spigoli *DA*, *EB*, *FC*; e però ne consegue che.

Il tronco di prisma triangolare retto ha per misura il prodotto della base pel terzo della somma dei suoi tre spigoli laterali.

PROPOSIZIONE LXX — *TEOREMA*.

163. *Ogni poliedro si può trasformare in una piramide equivalente* (fig. 31).

Dim. Potendosi ogni poliedro decomporre in piramidi (n° 111). il suo volume risulterà dalla somma delle piramidi parziali, le quali in generale avranno diverse altezze. Così, abbiam veduto (n° 110) che se si prenda un punto *O* nell'interno di un parallelepipedo *AG*, la rette tirate da quel punto a tutt'i vertici del poliedro, lo dividono in sei piramidi quadrangolari, che hanno per vertice comune il punto *O*, e per base le facce del poliedro medesimo. Quindi le altezze delle piramidi saranno le perpendicolari abbassate da quel vertice sopra ciascuna faccia. Or se si chiami *L* l'altezza della piramide *ABFEO*, non sarà difficile vedere che ciascuna delle cinque piramidi rimanenti potrà esser trasformata in una piramide equiva-

lente, che abbia per altezza l'altezza L della piramide $ABFEO$; perocchè (n. 156) si è dimostrato che due piramidi sono equivalenti, allorchè hanno le basi in ragione reciproca delle altezze. Se per esempio, si chiami K l'altezza della piramide $CDHGO$, questa si potrà trasformare in un'altra equivalente, che abbia l'altezza L, ed una base M, che sarà determinata dalla proporzione

$$L : K : : CDHG : M.$$

Similmente si potranno determinare le basi N, P, Q, R delle piramidi, che hanno la comune altezza L, e sono equivalenti alle quattro restanti piramidi del parallelepipedo AG. Se dunque si costruisce una piramide, che abbia L per altezza, e per base un poligono S, equivalente alla somma de'poligoni $ABFE$, M, N, P, Q, R, essa sarà equivalente al parallelepipedo AG. La costruzione del poligono S si esegue facilmente riducendo prima quei poligoni ad altrettanti qnadrati; e però ogni poliedro si può trasformare in una piramide equivalente. *C. D. D.*

164 *Scolio*. È facile vedere che a due piramidi si possono sempre sostituire due parallelepipedi rettangoli ad esse rispettivamente equivalenti. Infatti, si può sempre costruire un parallelogrammo rettangolo equivalente al poligono, che forma la base di una delle due piramidi; ed in tal guisa si ha la base di uno de'due parallelepipedi: l'altezza sarà la terza parte dell'altezza della piramide medesima. Quindi se si sapesse trovare in linee il rapporto di due parallelepipedi rettangoli, si potrebbe ridurre il rapporto di due poliedri qualunque al semplice rapporto di due linee, come nella geometria piana si è fatto per due poligoni qualunque. Questo risultamento è della più grande importanza, e fa conoscere la potenza della geometria; dappoichè il rapporto di due linee si può sempre assegnare in numeri, sia esattamente, sia con quella approssimazione che si vuole; per conseguenza la riduzione del rapporto delle figure piane e solide a quello di due linee non solamente è per se stesso un mirabile concepimento geometrico; ma fa vedere ancora la possibilità di applicare alla pratica le speculazioni della geometria. Per queste ragioni ci occuperemo nella proposizione seguente del rapporto in linee di due parallelepipedi rettangoli.

PROPOSIZIONE LXXI — *TEOREMA*.

165. *Il rapporto di due parallelepipedi rettangoli si può sempre esibire in linee* (fig. 33).

Dim. Sieno AB, AD, AC le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo BM, ed ab, ad, ac sieno quelle di un altro parallelepipedo rettangolo bm. Si trovi una quarta proporzionale G in ordine alle tre linee ac, AB, AD, ed una quarta proporzionale g in ordine alle tre linee AC, ab, ad. Dico che le due linee G, e g staranno fra loro come i due parallelepipedi BM, e bm.

Infatti, avendosi per costruzione

$ac : AB :: AD : G$
$AG : ab :: ad : g,$

Sarà il rettangolo ABD equivalente al rettangolo acG: ed il rettangolo abd equivalente al rettangolo ACg. Donde si deduce che se si faccia $pq = AC$, $pr = ac$, $po = G$, e $ps = g$, il parallelepipedo BM sarà equivalente al parallelepipedo pu; poichè il rettangolo rpo è equivalente al rettangolo ABD, e $pq = AC$. Parimente il parallelepipedo bm sarà equivalente al parallelepipedo ph, perchè il rettangolo qps è equivalente al rettangolo abd, e $pr = ac$. Ma i parallelepipedi pu, ph hanno una medesima faccia, o base qpr, e per conseguenza stanno fra loro come le altezze po, ps, ovvero come G, g, dunque sarà

$BM : bm :: G : g$. C. D. D.

CAPITOLO XI.

DEI POLIEDRI SIMILI.

166. Dato un poliedro qualunque, è evidente che si può sempre concepire un altro poliedro, il quale sotto diversa estensione abbia la medesima figura. Questi due solidi saranno allora composti di un medesimo numero di facce simili e similmente disposte, ed avranno gli angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, come pure gli angoli solidi, ed in fine saranno ne' due poliedri proporzionali tutti gli spigoli omologhi, vale a dire quelli che caderebbero nella stessa direzione quando si soprapponesse un angolo solido di un poliedro al suo uguale nel poliedro simile.

167. Or siccome per determinare un poliedro non è necessario conoscere tutte le parti che lo compongono, così pure non è necessario verificare tutti i caratteri di simiglianza sopraccennati per concludere che due poliedri sono simili. Quindi si possono definire i poliedri simili nel modo qui appresso.

168. Due poliedri si dicono *simili* quando hanno tutte le loro facce simili, similmente disposte, e gli angoli solidi formati dalle facce omologhe rispettivamente uguali. (*)

PROPOSIZIONE LXXII — *TEOREMA*.

169. *Se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base, la piramide parziale sarà simile alla piramide intera* (fig. 28).

Dim. Sia la piramide $SABCD$ tagliata da un piano $abcd$ parallelo alla base; dico che la piramide $Sabcd$ è simile a $SABCD$. Infatti,

(*) Qualche *restauratore* di Euclide ha trovato a ridire su questa definizione de' poliedri simili, dovuta al celebre geometra Roberto Simson. Ma essa è stata giudicata esatta dai Matematici; e non può mai dar luogo a veruno equivoco, se si terranno presenti le considerazioni, che precedono la definizione medesima.

tutte le facce dell'una sono simili alle facce dell'altra; e però gli spigoli omologhi sono proporzionali, e gli angoli piani degli angoli solidi omologhi sono uguali ciascuno a ciascuno. Inoltre è evidente che gli angoli diedri omologhi sono uguali; dunque saranno ancora uguali gli angoli solidi omologhi (n. 80); e per conseguenza le due piramidi sono simili. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXIII. — *TEOREMA*

170. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno gli angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente situati* (fig. 40).

Dim. Sieno *SABC*, e *sabc* due piramidi triangolari che abbiano i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente situati: gli angoli triedri *S*, e *s* avendo i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti, sono uguali fra loro (n. 77), e per conseguenza hanno gli angoli piani uguali. Lo stesso si può dimostrare per gli angoli triedri *A*, ed *a*, come pure per gli angoli triedri *B*, e *b*. Quindi i due triangoli *ASB* ed *asb* sono equiangoli, e perciò simili. Nello stesso modo si dimostra la simiglianza delle altre facce delle due piramidi triangolari, dunque queste piramidi sono simili. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXIV — *TEOREMA*.

171. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno una faccia simile adiacente a tre angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno* (fig. 40).

Dim. Nelle piramidi triangolari *SABC*, *sabc* sieno *ABC*, *abc* le due facce simili, gli angoli triedri *A* ed *a* saranno uguali, perchè hanno un angolo piano uguale adiacente a due angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti (n. 79); per conseguenza saranno uguali gli angoli diedri *SA sa*; e nello stesso modo si dimostrerà l'uguaglianza degli altri angoli diedri. Dunque (n. 176) le due piramidi triangolari sono simili. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXV — *TEOREMA*.

172. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce respettivamente simili e similmemte disposte* (fig. 40).

Dim. Sia l'angolo diedro *SA* uguale all'angolo diedro *sa*, e le facce *SAB*, *SAC* che comprendono il primo sieno rispettivamente simili alle facce *sab*, *sac* che comprendono il secondo; gli angoli triedri *S*, *s* saranno uguali, perchè hanno un angolo diedro uguale compreso fra due angoli piani uguali ciascuno a ciascuno (n. 78); per conseguenza sono uguali gli angoli diedri *SB*, e *sb*. Parimente gli angoli triedri *A*, ed *a* saranno uguali, perchè hanno un angolo

diedro uguale compreso fra due angoli piani uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti; perciò saranno uguali gli angoli diedri AB, ed ab.

Quindi le due piramidi triangolari proposte hanno le facce simili ASB, asb adiacenti a tre angoli diedri rispettivamente uguali e similmente situati; e però sono simili (n. 171). *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXVI — *TEOREMA*.

173. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno tre facce simili ciascuna a ciascuna e similmente disposte* (fig. 40);

Dim. Sieno le facce ASB, ASC, BSC rispettivamente simili alle facce asb, asc, bsc e similmente disposte. Gli angoli triedri S, e s saranno uguali, poichè hanno i loro tre angoli piani uguali ciascuno a ciascuno e similmente situati; e per conseguenza risultano uguali gli angoli diedri SA; sa; e le due piramidi proposte saranno simili in virtù del teorema precedente. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXVII — *TEOREMA*.

174. *Due piramidi triangolari simili hanno i loro spigoli omologhi proporzionali alle altezze* (fig. 40).

Dim. Sieno $SABC$, $sabc$ due piramidi triangolari simili. Facendo coincidere l'angolo triedro s col suo uguale S, la piramide $sabc$ verrà rappresentata dalla piramide $SEDF$. La retta ED sarà parallela ad AB, perchè l'angolo $SED = SAB$; e per la stessa ragione la retta DF sarà parallela a BC. Quindi il piano EDF sarà parallelo al piano ABC (n. 42). Or se dal punto S si abbassi la perpendicolare sopra uno di questi piani, essa sarà ancora perpendicolare all'altro. Sieno SO, SG le altezze delle due piramidi prese sopra questa perpendicolare, in virtù dei piani paralleli EDF, ABC, si avrà (n. 100),

$$SA : SE : : SO : SG,$$

per conseguenza le altezze sono proporzionali agli spigoli omologhi. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXVIII — *TEOREMA*.

175. *Due poliedri simili sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simili rispettivamente e similmente disposte* (fig. 32.)

Dim. Sieno SAB, $ABCD$, CDE tre facce consecutive del primo poliedro, e sab, $abcd$, cde le tre facce omologhe del secondo. Supponiamo che i due poliedri sieno decomposti in piramidi aventi per vertici i punti omologhi S, s, e per basi le facce dei poliedri mede-

simi; supponiamo inoltre che queste piramidi sieno divise in piramidi triangolari aventi per vertici gli stessi punti S, s; e si tirino le diagonali SC, SD, SE, sc, sd, se, come pure le rette AC, ac.

Le due facce $ABCD$, $abcd$ essendo simili per ipotesi saranno ancora simili i triangoli ABC, abc.

Da un'altra parte sono uguali gli angoli diedri $CBAS$, $cbas$: poichè essendo simili i poliedri sono uguali gli angoli solidi omologhi, dunque le due piramidi triangolari $SABC$, $sabc$ hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce simili rispettivamente e similmente disposte, perciò saranno simili. Dal che si deduce la simiglianza delle facce omologhe ASC, asc, e l'uguaglianza degli angoli diedri $SABC$, $sacb$. Gli angoli diedri $SACD$, $sacd$ saranno ancora uguali, perchè sono supplementi dei precedenti. Di più, i triangoli ADC, adc sono simili, dunque le due piramidi triangolari $SACD$, $sacd$ hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce simili ciascuna a ciascuna e similmente disposte; e però queste piramidi sono simili. Da ciò si conclude la simiglianza delle facce omologhe DSC, dsc, e l'uguaglianza degli angoli diedri $SDCA$, $sdca$. Or essendo simili i poliedri, gli angoli diedri omologhi $EDCA$, $edca$ sono uguali, perchè sono uguali gli angoli solidi omologhi. Se dunque da questi ultimi angoli diedri si tolgono i precedenti, i rimanenti angoli diedri $SCDE$, $scde$ saranno uguali. Ma i triangoli DCE, dce sono simili (e lo sarebbero ancora se in luogo di essere facce omologhe dei due poliedri, facessero semplicemente parte di due facce omologhe); dunque le due piramidi triangolari $SCDE$, $scde$ hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce simili rispettivamente e similmente disposte, e perciò sono simili.

Continuando nello stesso modo, si potrà dimostrare progressivamente la simiglianza di tutte le piramidi triangolari che compongono i due poliedri proposti. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXIX — *TEOREMA*.

176. *Nei poliedri simili gli spigoli omologhi, le diagonali omologhe delle facce omologhe, e le diagonali interne omologhe sono proporzionali* (fig. 32).

Dim. Infatti, 1° dalla simiglianza delle facce omologhe dei due poliedri si deducono le proporzioni
$SA : sa :: AB : ab :: CD : cd :: DE : de$, ecc. e però gli spigoli omologhi sono proporzionali.

2°. Si considerino due diagonali omologhe, per esempio, AC, ac di due facce omologhe $ABCD$, $abcd$, è manifesto che le diagonali accennate sono proporzionali agli spigoli omologhi AB, ab. Parimente le diagonali omologhe di due altre facce omologhe sono proporzionali a due spigoli omologhi; ma tutti gli spigoli omologhi sono proporzionali, dunque le diagonali omologhe delle facce omologhe sono proporzionali.

3°. Finalmente, se si considerano due diagonali omologhe interne, per esempio, *SE*, *se*, queste saranno proporzionali agli spigoli omologhi *CD*, *cd*, in virtù della simiglianza delle piramidi *SCDE*, *scdc*. Dunque le diagonali interne omologhe sono proporzionali. *C. D.D.*

PROPOSIZIONE LXXX — *TEOREMA*.

177. *Le superficie dei poliedri simili stanno fra loro come i quadrati degli spigoli omologhi* (fig. 32).

Dim. Le aje dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi, dunque sarà la faccia *SAB* alla faccia *sab* come il quadrato di *AB* al quadrato di *ab*. Parimente sarà la faccia *ABCD* alla faccia *abcd* come il quadrato di *AB* al quadrato di *ab*, e la faccia *DCE* alla faccia *dce* come il quadrato di *DC* al quadrato di *dc*. Ma tutti gli spigoli omologhi dei poliedri simili sono proporzionali, e però sono proporzionali anche i loro quadrati; dunque sarà la faccia *ASB* alla faccia *asb* come la faccia *ABCD* ad *abcd*, e come *DCE* a *dce*, ecc,

Quindi la somma di tutte le facce del primo poliedro starà alla somma di tutte le facce del secondo come una faccia qualunque dell'uno sta alla faccia omologa dell'altro, ovvero come il quadrato di uno spigolo del primo sta al quadrato di uno spigolo omologo del secondo. Dunque le superficie dei poliedri simili stanno fra loro come i quadrati degli spigoli omologhi. *C. D. D:*

PROPOSIZIONE LXXXI — *TEOREMA*.

178. *I poliedri simili stanno fra loro come i cubi degli spigoli omologhi* (fig. 40).

Dim. Si considerino in primo luogo le due piramidi triangolari simili *SABC*, *sabc*. Or due piramidi stanno fra loro in ragion composta dalla ragione delle basi *ABC*,*abc*, e dalla ragione delle altezze *SO*, *so*. Ma le basi essendo simili stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi, e questi lati sono proporzionali alle altezze (n. 100), dunque le due piramidi sono in ragion triplicata de' lati omologhi, ovvero come i cubi di questi lati.

Ciò premesso, passiamo a considerare due poliedri simili qualunque (fig. 32), che si potranno concepire divisi in un medesimo numero di piramidi triangolari simili rispettivamente e similmente disposte. Ciascuna delle piramidi del primo poliedro, per esempio; *SABC* starà alla sua omologa *sabc* nell'altro, come il cubo di uno dei suoi spigoli *AB* sta al cubo dello spigolo omologo *ab* dell'altra piramide, ma tutti questi spigoli sono nei due poliedri nel medesimo rapporto, poichè sono necessariamente o gli spigoli omologhi dei poliedri proposti, o le diagonali omologhe delle loro facce omologhe,

o infine le diagonali omologhe interne; per conseguenza i loro cubi formeranno una serie di rapporti uguali, e questi rapporti essendo uguali a quelli delle piramidi, si concluderà che questi ultimi rapporti sono uguali fra loro. Laonde la somma delle piramidi costituenti il primo poliedro starà alla somma delle piramidi costituenti il secondo, come una qualunque piramide *SABC* dell'uno sta alla corrispondente piramide *sabc* dell'altro, ovvero come il cubo di uno spigolo del primo poliedro sta al cubo dello spigolo omologo del secondo. Mettendo in luogo delle piramidi i poliedri da esse composti, ne risulterà che i poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi. *C. D. D.*

CAPITOLO XII.

DEI POLIEDRI SIMMETRICI.

179. Per essere uguali due piramidi triangolari non basta che abbiano le loro facce uguali ciascuna a ciascuna, ma si richiede ancora che queste facce sieno disposte nello stesso ordine; poichè se fossero disposte in ordine inverso non potrebbero affatto coincidere, stante la simmetria degli angoli solidi. Conviene adunque considerare le figure solide, nella costituzione delle quali entrano gli angoli solidi simmetrici.

PROPOSIZIONE LXXXII — *PROBLEMA.*

180. *Se due piramidi triangolari, che hanno le facce rispettivamente uguali, ma disposte in ordine inverso, sono situate in modo che due facce uguali coincidano, il piano della faccia comune sarà perpendicolare alla retta congiungente i vertici opposti, e la dividerà in due parti uguali* (fig. 41).

Dim. Sieno *SABC*, e *S'ABC* le due piramidi triangolari proposte: sia *O* il punto di mezzo della retta *SS'* che unisce i vertici opposti alla base comune *ABC*; si conducano le rette *AO*, *BO*, *CO*. Essendo $AS = AS'$, il triangolo *SAS'* sarà isoscele, e per conseguenza la retta *AO* è perpendicolare alla retta *SS'*. Parimente essendo $BS = BS'$, e $CS = CS'$, le rette *BO*, e *CO* sono perpendicolari a *SS'*. Dunque (n° 13) le tre rette *AO*, *BO*, *CO* si trovano nel piano che sarebbe prodotto dal rivolgimento dell'angolo retto *SOC* intorno al lato *SO* supposto immobile; ma questo piano contiene i tre punti *A*, *B*, *C*; dunque esso è il piano della faccia comune *ABC*. *C. D. D.*

181. *Scolio.* Dalla proposizione precedente è derivato che due piramidi triangolari si dicono *simmetriche* quando hanno le loro facce uguali ciascuna a ciascuna e disposte in ordine inverso; dappoichè possono essere situate simmetricamente rispetto a un medesimo piano, cioè in modo che i vertici degli angoli solidi omologhi

sono situati a distanze uguali dal piano accennato, sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano.

PROPOSIZIONE LXXXIII — *TEOREMA*.

182. *Due piramidi triangolari simmetriche hanno gli angoli diedri omologhi rispettivamente uguali, e gli angoli triedri omologhi simmetrici* (fig. 42).

Dim. Sieno le due piramidi simmetriche *SABC*, *sabc*, nelle quali sia la faccia $SBA = sba$, $SBC = sbc$, $SCA = sca$, e $CBA = cba$.

Essendo uguali le facce omologhe, gli angoli piani omologhi di queste facce saranno rispettivamente uguali; e gli angoli triedri omologhi saranno composti di angoli piani rispettivamente uguali; per conseguenza (n° 70) l'angolo diedro di due facce contigue qualunque in una delle piramidi proposte sarà uguale all'angolo diedro delle facce omologhe nell'altra: ma queste facce sono disposte in ordine inverso, dunque gli angoli solidi omologhi saranno simmetrici. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXXIV — *TEOREMA*.

183. *Una piramide triangolare non può avere che una sola simmetrica* (fig. 42),

Dim. Infatti, se si voglia formare una piramide simmetrica alla piramide *SABC*, vi dovrà essere sempre un angolo triedro costituito di tre angoli piani *BSA*, *BSC*, *ASC* disposti in ordine inverso a quello, in cui sono disposti nella piramide *SABC*. Or si è dimostrato (n° 76) che questi tre angoli non si possono disporre che in due soli modi diversi, dunque le tre facce *BSA*, *BSC*, *ASC* non si possono disporre che in due soli modi differenti; ma quando queste facce si saranno riunite in un punto per formare l' angolo simmetrico all'angolo *S*, la quarta faccia trovasi determinata, dunque non può esservi che una sola piramide *sabc* simmetrica alla piramide *SABC*. *C D. D.*

184. *Scolio*. Le proposizioni dimostrate nei paragrafi 113. 115., 116, e 117 si verificano ancora quando gli elementi rispettivamente eguali nelle due piramidi, sono in esse inversamente disposti, solamente in vece di dire che le piramidi sono *uguali*, si dirà che sono *simmetriche*; e così si avranno diversi criterj per giudicare della simmetria delle piramidi triangolari. Infatti, se si suppone costrutta una piramide simmetrica ad una delle due piramidi proposte, essa in virtù delle proposizioni sopraccennate dovrà risultare uguale all'altra piramide proposta; e però le due piramidi proposte saranno simmetriche fra loro.

PROPOSIZIONE LXXXV — *TEOREMA.*

185. *Se da tutti i vertici di un poliedro, decomposto in piramidi triangolari, si abbassino delle rette perpendicolari ad un medesimo piano, e si prolunghino al di là di questo piano di quantità uguali ad esse medesime, le estremità di queste perpendicolari saranno i vertici di un nuovo poliedro, che potrà essere decomposto in un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche a quelle del primo ed inversamente disposte* (fig. 43.)

Dim. Sia S il vertice di tutte le piramidi costituenti il poliedro proposto; A, B, C, D, ecc. dinotino differenti vertici del poliedro medesimo, ed s, a, b, c, d, ecc. i punti corrispondenti del secondo poliedro determinati nel modo sopraccennato. Finalmente sieno M e N, i punti di mezzo delle rette Ss, e Bb, vale a dire i piedi di queste perpendicolari nel piano PQ, su cui sono state abbassate.

Le rette Ss, e Bb, essendo perpendicolari a un medesimo piano PQ, sono paralelle fra loro, e per conseguenza sono situate in un medesimo piano; inoltre sono perpendicolari alla retta MN che unisce i loro piedi nel piano PQ; perciò immaginando che il trapezio $bsMN$ giri intorno alla retta MN, esso potrà combaciare col trapezio $BSMN$, e però si avrà $SB = sb$. Nello stesso modo si dimostrerà che $SA = sa$, $SC = sc$, $AB = ab$, $BC = bc$; e per conseguenza le due piramidi triangolari $SABC$, $sabc$, avranno le facce uguali ciascuna a ciascuna; ma queste sono inversamente disposte, dunque le piramidi accennate sono simmetriche fra loro. Similmente si potrà dimostrare che le piramidi triangolari $SACD$, $sacd$ sono simmetriche, e così di seguito. Dunque i due poliedri sono composti di un medèsimo numero di piramidi triangolari simmetriche rispettivamente; e da un'altra parte è manifesto che queste piramidi si trovano inversamente disposte nei due poliedri. Infatti basta per veder ciò chiaramente osservare la fig. 44. dove i due poliedri sono situati l'uno acccanto all'altro. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXXVI — *TEOREMA.*

186. *Reciprocamente, due poliedri composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche inversamente disposte, possono essere situati in modo che le rette, le quali uniscono i vertici omologhi sieno divise in due parti uguali da un medesimo piano perpendicolare a tutte queste rette* (fig. 44.)

Dim Sieno S, s i due poliedri proposti. Da tutti i vertici del poliedro S si abbassino delle perpendicolari sopra un piano qualunque, le quali si prolunghino al di sotto di questo piano di quantità uguali ad esse medesime, si formerà un nuovo poliedro, che chiameremo S'. I poliedri, S e S' in virtù della proposizione precedente saranno composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simme-

triche inversamente disposte. Ma i due poliedri proposti S, e s sono anch'essi per supposizione composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche inversamente disposte, e da un'altra parte una piramide triangolare non può aver che una sola simmetrica (n° 183), dunque i poliedri s, e S' sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari uguali ciascuna a ciascuna, e similmente disposte; e per conseguenza questi poliedri sono uguali fra loro (n°122).

Da ciò si deduce che il poliedro s può esser soprapposto al poliedro S', ed in questa situazione del poliedro s rispetto a S, il piano sopra nominato dividerà in due parti uguali tutte le rette che uniscono i loro vertici omologhi, e sarà perpendicolare a queste medesime rette. *C. D. D.*

187. *Scolio* I. Dalla proposizione precedente è derivato che due poliedri son detti *simmetrici* fra loro quando si possono decomporre in un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche ed inversamente disposte; dappoichè possono sempre essere situati simmetricamente rispetto a un medesimo piano. Quindi il Legendre, che fu primo a parlare dei poliedri simmetrici, non li considera se non relativamente alla posizione che possono avere rispetto ad un medesimo piano.

Infatti, definisce i poliedri simmetrici dicendo esser quelli che, avendo una base comune, sono costrutti similmente l'uno al di sopra del piano di questa base, l'altro al di sotto, con questa condizione che i vertici degli angoli solidi omologhi sieno situati ad uguali distanze dal piano della base, sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano.

Partendo da questa definizione il lodato geometra ha dato alcune proposizioni intorno ai poliedri simmetrici, ma sembra che con tale procedimento rimanga nascosto il cammino da esso seguito per arrivare ad una sì bella scoperta.

188. *Scolio* II. La proposizione precedente prova che un poliedro non può avere che un solo simmetrico, e la proposizione (n°185) offre il mezzo di costruire nn poliedro simmetrico ad un poliedro dato.

PROPOSIZIONE LXXXVII — *TEOREMA*.

189. *Due poliedri simmetrici hanno le facce omologhe rispettivamente uguali, gli angoli diedri omologhi essi pure rispettivamente uguali, e gli angoli solidi omologhi simmetrici* (fig. 44).

Dim. Sieno $SABC$, $SACD$, ecc, le piramidi costituenti uno dei poliedri proposti, e $sabc$, $sacd$, ecc. le piramidi omologhe costituenti l'altro poliedro.

1°. È manifesto che le facce omologhe dei due poliedri sono composte di facce omologhe ed uguali delle piramidi costituenti, e per conseguenza le facce omologhe dei due poliedri simmetrici sono uguali.

2°. Due angoli diedri omologhi dei due poliedri o sono angoli diedri omologhi, come *AB*, *ab*, delle piramidi costituenti, o sono composti di un medesimo numero di angoli diedri omologhi delle piramidi medesime, come avviene per gli angoli diedri omologhi *CA*, *ca*, che sono composti degli angoli diedri *SCAB*, *SCAD*, *scab*, *scad*. In ambedue i casi gli angoli diedri omologhi dei due poliedri saranno uguali.

3°. Finalmente gli angoli solidi omologhi dei due poliedri sono composti degli angoli triedri omologhi delle piramidi costituenti, come può vedersi negli angoli solidi *A*, ed *a*, che sono composti degli angoli triedri *ASBC*, *ASCD*, *asbc*, *ascd* omologhi, e disposti in ordine inverso, perchè queste stesse piramidi sono disposte inversamente nei due poliedri. Ma gli angoli triedri accennati sono simmetrici, dunque lo saranno ancora gli angoli solidi omologhi dei due poliedri. *C. D. D.*

PROPOSIZONE LXXXVIII — *TEOREMA*.

190. *Due poliedri sono simmetrici quando hanno le facce rispettivamente uguali, disposte in ordine inverso, e gli angoli diedri omologhi essi pure rispettivamente uguali* (fig. 44).

Dim. Siano *S*, *s* i due poliedri proposti, e supponiamo che siasi costrutto un terzo poliedro *S'* simmetrico al poliedro *S*, esso avrà con questo poliedro (n. 189) gli angoli diedri omologhi eguali, e le facce omologhe eguali ed inversamente disposte. Per conseguenza i poliedri *S'*, *s* avranno gli angoli diedri rispettivamente eguali, e le facce omologhe eguali e similmente disposte, e perciò saranno eguali (n. 124.) E poichè i poliedri *S*, *S'* sono simmetrici, lo saranno pure i poliedri proposti *S*, *s*. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXXIX — *TEOREMA*.

191. *Due prismi sono simmetrici quando hanno un angolo solido simmetrico compreso tra facce omologhe uguali ciascuna a ciascuna* (fig. 29).

Dim. Supponiamo che nei due prismi *CF*, *cf* sia l'angolo triedro *A* simmetrico all'angolo triedro *a*, la faccia $ABD = abd$, $AK = ag$, ed $AG = ak$. Se si costruisce un terzo prisma, che chiameremo *C'F'*, simmetrico al prisma *CF*, questi due prismi avranno le facce omologhe rispettivamente uguali, e gli angoli solidi omologhi simmetrici fra loro (n° 188). Dunque i due prismi *CF'*, e *cf* avranno un angolo solido uguale compreso tra facce respettivamente uguali; perciò saranno uguali (n. 119), ed essendo simmetrici i prismi *CF*, *C'F'*, lo saranno pure i prismi proposti *CF*, *cf*. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XC — *TEOREMA*

192. *Il piano che passa per le diagonali corrispondenti di due facce opposte di un parallelepipedo, lo divide in due prismi triangolari simmetrici fra loro* (fig. 30).

Dim. Infatti, i due prismi triangolari *ABDEFH*, *BCDFGE* hanno le facce *AE*, *CF* uguali come facce opposte del parallelepipedo; hanno pure le facce uguali *DH*, *CE* per la stessa ragione, ed è poi il triangolo *ABD* uguale al triangolo *EGF*, dunque i due prismi accennati hanno gli angoli solidi *A*, e *G* compresi tra facce omologhe rispettivamente uguali; ma questi angoli solidi sono simmetrici (n° 107), dunque (n° 191) i due prismi sono simmetrici fra loro. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XCI — *TEOREMA*.

193. *Due poliedri simmetrici sono equivalenti fra loro* (fig. 41).

Dim. Infatti, 1.° Due piramidi triangolari simmetriche *SABC*, e *S'ABC* sono equivalenti, poichè hanno una medesima base *ABC*, ed uguali altezze *SO*, *S'O*.

2.° Due poliedri simmetrici sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche, dunque essendo equivalenti le piramidi accennate, saranno pure equivalenti i poliedri simmetrici. *C. D. D.*

194. *Scolio*. Apparisce dal teorema precedente che i poliedri simmetrici costituiscono un genere intermedio fra i poliedri uguali, ed i poliedri equivalenti; il che non avviene nelle figure piane rettilinee, dove fra l'uguaglianza e l'equivalenza di queste figure non esiste alcuno stato intermedio. Una siffatta dottrina fu totalmente ignota agli antichi geometri, i quali perciò hanno a noi tramandata una teorica imperfetta dei poliedri.

CAPITOLO XIII.

DEI POLIEDRI REGOLARI.

195. Un poliedro dicesi *regolare* quando tutte le facce sono poligoni regolari, uguali, e tutti i suoi angoli solidi sono pure uguali fra loro.

196. Or il più semplice di tutti i poligoni regolari è il triangolo equilatero, di cui ciascun angolo equivale a due terzi di un angolo retto: se dunque si riunissero più triangoli equilateri per formare un angolo solido, non se ne potrebbero adoperare che tre, quattro, o cinque: dappoichè sei dei loro angoli piani riuniti equivalgono a sei volte due terzi di un angolo retto, ovvero a quattro angoli retti, e perciò non possono formare un angolo solido (n. 67). Con più ra-

gione non se ne potrebbero prendere più di sei. Laonde non possono esistere che tre specie di poliedri regolari con facce triangolari.

197. Dopo il triangolo equilatero viene il quadrato, di cui ciascun angolo è retto. Se dunque si prendano più quadrati per formare un angolo solido, non se ne potranno adoperare che tre; e per conseguenza non può esistere che un solo poliedro con facce quadrate.

198. Quanto al pentagono regolare, ciascuno dei suoi angoli equivale a sei quinti di un angolo retto, onde non se potrebbero adoperare più di tre per formare un angolo solido. Quindi un solo poliedro regolare può esistere con facce pentagonali.

199. L' angolo di un esagono regolare vale quattro terzi di un angolo retto, tre dei quali fanno quattro retti; e perciò non possono formare un angolo solido. Dunque non può esistere nessun poliedro regolare con facce esagonali. Similmente non può esistere alcun poliedro con facce ettagonali, ottagonali, ecc., perchè ciascun angolo dell ettagono regolare, dell'ottagono regolare, e di tutti gli altri poligoni regolari di maggior numero di lati, è maggiore di quello dell'esagono regolare.

200. Dalle cose precedenti si deduce che possono esistere soltanto cinque poliedri regolari, e sono.

1. Il *tetraedro regolare, o piramide triangolare regolare*, formata da quattro triangoli equilateri uguali.

2. L'*esaedro regolare*, o *cubo*, formato da sei quadrati uguali.

3. L' *ottaedro regolare*, formato da otto triangoli equilateri uguali.

4. Il *dodecaedro regolare*, formato da dodici pentagoni regolari uguali.

5. L'*icosaedro regolare*, formato da venti triangoli equilateri uguali.

201. I geometri si sono occupati a dare le costruzioni di questi poliedri; ma siccome non si parla di essi negli elementi, così rimettiamo chi volesse conoscerle al Lib. XIII degli Elementi di Euclide, alla Geometria Solida del Caravelli, ad una Appendice di quella del Legendre, ecc. Qui ci limiteremo ad osservare che gli antichi geometri davano specialmente il nome di *tetraedro*, *esaedro*, *ottaedro*, *dodecaedro*, *icosaedro* ai cinque poliedri regolari, perchè non si sono occupati dei poliedri in generale, ma delle piramidi, dei prismi, e de' poliedri regolari.

CAPITOLO XIV.

DEI TRE CORPI ROTONDI.

202. I solidi, de' quali fin qui si è parlato, sono terminati da superficie piane; ma oltre questi solidi la geometria elementare ne considera tre altri, cioè il *cilindro retto*, il *cono retto*, e la *sfera*, ai quali si dà il nome di *corpi rotondi*, perchè i due primi sono terminati da superficie curve e da superficie piane, e l' ultima da una sola superficie curva.

203. Il *cilindro retto* (fig. 45) è il solido prodotto dalla rotazione di un rettangolo *ABCD* intorno ad un suo lato immobile *AB*. Questo lato chiamasi *asse* del cilindro ; i cerchi *DHE* , *CGF* descritti dai lati *AD*, *BC* ne sono le *basi*, e la linea *CD*, che genera la *superficie laterale* o *convessa* del cilindro, ne è il *lato*. Finalmente l' *altezza* del cilindro è la distanza dei piani paralleli delle due basi : essa è eguale all' asse , o al lato del cilindro medesimo.

204. Da questa genesi del cilindro ne consegue che ogni sezione fatta da un piano che passa per l' asse, è un rettangolo come *CDEF* doppio del rettangolo generatore *ABCD* , e che ogni sezione *PRQ* fatta da un piano perpendicolare all' asse *AB*, è un cerchio uguale a ciascuna base. Infatti. nel rivolgimento del rettangolo *ABCD* intorno ad *AB*, la retta *OQ* perpendicolare ad *AB* descrive un cerchio uguale alla base.

205. Due cilindri retti si dicono *simili* allorchè sono prodotti dalle rotazioni di due rettangoli simili *ABCD*, *abcd* intorno a lati omologhi *AB*, *ab* ; cioè quando i loro assi sono proporzionali ai raggi delle loro basi.

206. Il *cono retto* (fig. 46) è il solido, che vien generato dal rivolgimento di un triangolo rettangolo *SAO* intorno ad un cateto immobile *SO*. L' altro cateto *AO* genera il cerchio *ANB*, che dicesi *base* del cono. Il punto *S* si chiama *vertice* del cono ; il cateto *SO* che unisce il vertice col centro della base è l' *asse* del cono; e finalmente si dà il nome di *lato*, o *apotema* alla linea *SA* che descrive la *superficie laterale* o *convessa* del cono medesimo.

207. Apparisce da siffatta genesi del cono che ogni sezione fatta da un piano, il quale passa per l' asse, è un triangolo isoscele come *ASB* doppio del triangolo generatore *SOB*; e che ogni sezione *EMD* perpendicolare all' asse è un cerchio.

208. Due coni retti sono detti *simili* allorchè sono prodotti dalle rotazioni di due triangoli rettangoli simili *ASO*. *aso* intorno a cateti omologhi, cioè quando i loro assi sono proporzionali ai raggi delle loro basi.

209. Il *cono troncato*, o *tronco di cono* (fig. 47) è la porzione di cono compresa fra la base ed un piano ad essa parallelo. Quindi il tronco di cono può considerarsi come prodotto dalla rotazione di un trapezio *AODH*, di cui gli angoli *O*, e *D* sono retti, intorno al lato immobile *OD*. Questo lato dicesi *asse* o *altezza* del tronco ; e si chiamano poi *basi* i cerchi descritti dai lati *DA*, *DH*; e finalmente alla linea *AH* si dà il nome di *lato del tronco di cono*.

210. I tronchi di due coni retti si dicono *simili* quando sono prodotti da trapezj simili; cioè quando i loro assi sono proporzionali ai raggi delle basi corrispondenti.

211. La *sfera* (fig. 48) è il solido generato dal rivolgimento di un semicerchio *ADB* intorno ad un suo diametro *AB*. Quindi la *superficie sferica* che vien prodotta dalla rotazione della semicirconferenza *ADB*, ha tutti i suoi punti equidistanti dal centro *O* del semicerchio generatore , che dicesi *centro della sfera*. La distanza del

centro della sfera a un punto qualunque della sua superficie si chiama *raggio della sfera*. È manifesto che tutti i raggi di una sfera sono uguali fra loro, e che tutti i diametri sono uguali e doppj de'raggi.

212. Dalla genesi della sfera risulta ancora che ogni sezione fatta da un piano, il quale passa pel centro, è un cerchio, di cui il raggio è il raggio della sfera. Infatti tutti i punti come *A*, *L*, *B* comuni al piano accennato ed alla superficie sferica si trovano ad un uguale distanza dal punto *O*; per conseguenza la sezione medesima *ALB* è un cerchio che ha per diametro il diametro della sfera. In generale ogni sezione *MKN* fatta con un piano qualunque è un cerchio; poichè se dal centro *O* si abbassi sul piano *MKN* la perpendicolare *OE*, le oblique *OM*, *OK*, *ON*, ecc, essendo uguali come raggi della sfera saranno equidistanti dal piede *E* della perpendicolare; e però le rette *EM*, *EK*, *EN*, ecc. saranno uguali fra loro, e la sezione *MKN* sarà un cerchio.

213. Ogni circolo della sfera che passa pel centro di essa dicesi *circolo massimo*; chiamasi *circolo minore* quello che non passa pel centro della sfera. È evidente che i circoli massimi sono uguali fra loro, poichè hanno il medesimo centro ed il medesimo raggio della sfera.

214. Due circoli massimi si tagliano sempre in due parti uguali, perchè la loro comune intersezione, passando pel centro, è un diametro. Quindi le loro circonferenze s' intersegano alla distanza di 180 gradi,

215. Ogni circolo massimo divide la sfera e la sua superficie in due parti uguali; dappoichè un circolo massimo rivolgendosi intorno al proprio diamétro deve produrre la sfera medesima. La metà di una sfera dicesi *emisfero*.

216. Il centro di un circolo minore e quello della sfera sono in una medesima retta perpendicolare al piano del circolo minore.

217. I circoli minori sono tanto più piccoli quanto più si allontanano dal centro della sfera; perchè più grande è quella distanza, e più piccola diviene la corda, come *MN*, che è il diametro del circolo minore *MKN*,

218. Per due punti dati sopra la superficie della sfera può sempre passare un arco di circolo massimo; poichè i due punti dati ed il centro della sfera sono tre punti che determinano la posizione di un piano.

Nondimeno se i due punti accennati fossero alle estremità d' un diametro, allora questi due punti ed il centro sarebbero in linea retta, e vi sarebbero infiniti circoli massimi che potrebbero passare per i due punti dati.

219. Un piano indefinito che ha un solo punto comune colla superficie di una sfera dicesi *piano tangente* della sfera medesima. Esso può considerarsi come prodotto dal rivolgimento della tangente *RS* al cerchio generatore *ADB* intorno al diametro *AB*. Quindi un piano perpendicolare alla estremità di un diametro della sfera è tangente a questa sfera; e reciprocamente ogni piano tangente alla

sfera è perpendicolare all'estremità del diametro che passa pel punto del contatto.

220. Si dice *zona* la parte della superficie della sfera compresa fra due piani paralleli. I circoli che rappresentano le sezioni dei piani medesimi colla sfera si chiamano *basi* della zona. Se uno di questi piani è tangente alla sfera, allora la zona ha una base, e con altro nome dicesi *calotta*.

221. Una zona a due basi *FMNG* può considerarsi come generata dal rivolgimento di un arco *FM* intorno al diametro *AB* che passa per i centri delle due basi. Una zona ad una base *AFG* si può considerare come prodotta dal rivolgimento di un arco *AF* intorno al diametro *AB* che passa per una delle sue estremità.

222. L' *altezza* di una zona è la distanza dei due piani paralleli, che sono le basi della zona.

223. Si chiama *s gmento sferico* la porzione della sfera compresa fra due piani paralleli. Le sezioni di questi piani colla sfera sono le *basi* del segmento medesimo. Se uno dei piani paralleli fosse tangente alla sfera, allora il segmento sferico avrebbe una sola base.

224. L' *altezza* d'un segmento sferico è la distanza dei due piani paralleli che formano le basi del segmento.

225. Dicesi *settore sferico* la porzione della sfera compresa fra una calotta, ed una superficie conica, che ha per base il circolo base della calotta, e per vertice il centro della sfera.

Un settore sferico può considerarsi come prodotto dalla rotazione di un settore circolare *FAO* intorno ad uno dei suoi lati *OA*, *OF*.

Finalmente si chiama *fuso* la parte della superficie della sfera racchiusa fra due semi-circoli massimi che terminano a un diametro comune, e si dà il nome di *cuneo* o *unghia sferica* alla parte della sfera compresa fra il fuso e le sue due facce.

CAPITOLO XV.

DELLA MISURA DELLE SUPERFICIE DE' TRE CORPI ROTONDI, E DEI RAPPORTI CHE NE DERIVANO.

226. La teorica de' tre corpi rotondi riducesi nella geometria elementare quasi tutta alla misura delle loro superficie, de' loro volumi, ed ai rapporti che ne derivano. Quindi è necessario che si conosca il principio su cui stabiliremo una siffatta misura, dappoichè i geometri nell' assegnarla hanno seguito diversi metodi, secondochè hanno giudicato essere l' uno più esatto, o più facile dell' altro. Or il principio che seguiremo consiste nel considerare il cerchio come un poligono regolare di un numero infinito di lati; e per conseguenza il cilindro retto come un prisma retto di un numero infinito di facce, il cono retto come una piramide regolare di un numero infinito di facce, e la sfera come un poliedro di un numero infinito di facce. Questa maniera di considerare il cerchio, ed i tre corpi rotondi ha il prezioso vantaggio di abbreviare le dimostrazioni, che

andiamo ad esporre, de' così detti *Teoremi di Archimede* intorno al cilindro, al cono, ed alla sfera; e di farle concepire e ritenere facilissimamente, perchè s' immedesimano, per così dire, col metodo con cui i teoremi accennati vennero scoverti da quel sommo geometra dell' antichità, il quale li dimostrò poi in altra guisa per adattarsi alla maniera di pensare de' geometri del suo tempo, i quali non si permettevano mai di adoperare la considerazione dell' infinito nelle loro dimostrazioni. E si noti ancora che quando quella maniera di considerare il cerchio, ed i tre corpi rotondi venga adoperata come si conviene, e non s'appoggi a ragionamenti vaghi ed arbitrarii, essa può riescire tanta esatta quanto qualsivoglia altro metodo, che si volesse mettere in suo luogo.

L' idea dell' infinito non è chiara sicuramente; ma l' oscurità sta nella natura del soggetto, vale a dire sta nel passaggio dalla linea retta alla curva, dalle superficie piane alle curve, che non può evitarsi allorchè si tratta della misura del cerchio, e de' tre corpi rotondi; dappoichè in tal caso devesi considerare la natura della linea circolare, o sia di una linea curva. Inoltre una siffatta oscurità s' incontra in tutta la geometria quando dalle grandezze commensurabili si deve passare alle incommensurabili; e nell' entrata della geometria stessa si ritrova nella teorica delle linee rette parallele. L' idea dell' infinito si potrà mascherare solamente, ma non si potrà mai togliere; per cui val meglio considerarla a viso aperto, e senza orpello o mistero.

PROPOSIZIONE XCII — *TEOREMA.*

227. *La superficie laterale o convessa del cilindro retto ha per misura il prodotto della circonferenza della base per l'altezza* (fig. 45).

Dim. Perocchè, se si considera la circonferenza della base *EHD* come un poligono regolare di una infinità di lati, il cilindro medesimo potrà essere considerato come un prisma retto di una infinità di facce. Or essendo rettangolari le facce di un prisma retto, la sua superficie laterale, che è la somma di tutti questi rettangoli, avrà per misura il prodotto del perimetro della base per l' altezza; per conseguenza la superficie laterale del cilindro retto dovrà essa pure avere per misura il prodotto della circonferenza della base *EHD* per l'altezza *EF. C. D. D.*

228. *Corollario.* Da ciò si deduce che la superficie convessa di un cilindro retto è eguale a quella di un rettangolo avente per base la circonferenza della base del cilindro, e per altezza quella del cilindro medesimo. Laonde tutto quello che nella geometria piana è stato dimostrato intorno ai rapporti di due rettangoli si può applicare alle superficie convesse di due cilindri retti.

PROPOSIZIONE XCIII — *TEOREMA.*

229. *Le superficie convesse di due cilindri simili stanno fra loro come i quadrati delle altezze, o come i quadrati dei raggi delle basi corrispondenti* (fig. 45.)

Dim. Infatti, essendo nei cilindri simili (n° 205) gli assi o le altezze *AB, ab* proporzionali ai raggi delle basi *AE, ae*; ed essendo i raggi proporzionali alle circonferenze *DEH*, *deh*, ne risulta che queste saranno proporzionali alle altezze, e per conseguenza saranno simili i rettangoli che rappresentano le superficie convesse dei due cilindri simili. Ma i rettangoli simili stanno come i quadrati de' lati omologhi; dunque le superficie convesse de'due cilindri stanno come i quadrati delle altezze, ovvero come i quadrati de'raggi. *C. D. D,*

230. *Scolio.* È facile vedere che nello stesso rapporto stanno le superficie totali di due cilindri simili.

PROPOSIZIONE XCIV — *TEOREMA.*

231. *La superficie convessa della piramide regolare ha per misura il prodotto del perimetro della sua base per la metà della sua apotema* (fig. 49).

Dim. Sia *SO* l'altezza della piramide regolare *SABD.* Essendo il punto *O* il centro del poligono regolare *ABCDE* (n. 90), le oblique *SA, SB, SC*, ecc. saranno ugualmente distanti dalla perpendicolare *SO*; perciò saranno isosceli ed uguali i triangoli *ASB*, *BSC*, *CSD*, ece. che formano la superficie convessa della piramide regolare. Ma ciascuno di questi triangoli, per esempio *ASB*, ha per misura il prodotto della sua base *AB* per la metà della sua altezza *SH*, che è l'apotema della piramide, dunque la snperficie convessa di questa avrà per misura il prodotto del perimetro *ABCDE* per la metà di *SH. C. D. D.*

232. *Scolio.* E facile ora vedere che se si taglia la piramide regolare *SABD* con un piano *abce* parallelo alla base, la superficie convessa del tronco di piramide regolare, che è composta dei trapezj *Ab*, *Bc*, *Cd*, ecc. avrà per misura la porzione *Hh* dell'apotema *SH* moltiplicata per la semisomma dei perimetri delle due basi del tronco piramidale.

PROPOSIZIONE XCV — *TEOREMA.*

233. *La superficie convessa del cono retto ha per misura il prodotto della circonferenza della sua base per la metà del suo lato* (fig. 46).

Dim. Infatti, se si consideri il cerchio *ANB* come un poligono

regolare di un numero infinito di lati, il cono $SANB$ potrà considerarsi come una piramide regolare di un numero infinito di facce; per conseguenza la superficie convessa del cono retto avrà per misura la circonferenza della sua base moltiplicata per la metà di un lato SA. C. D. D.

234. *Corollario* I. Da ciò si deduce che la superficie convessa di un cono retto è equivalente all'aja di un triangolo rettangolo, di cui un cateto rappresenta la circonferenza della base del cono, e l'altro il lato del cono medesimo. Quindi si potrà applicare alle superficie convesse dei coni retti quanto si è dimostrato intorno ai rapporti delle aje dei triangoli.

235. *Corollario* II. Pel punto di mezzo E del lato SA si conduca un piano parallelo alla base del cono. E poichè le circonferenze stanno come i raggi, le circonferenze ANB, EMD staranno come i raggi AO, EK; ma AO è doppio di EK perchè SA è doppio di SE, dunque la circonferenza della base del cono è doppia di quella della sezione, per conseguenza:

La superficie convessa di un cono retto ha per misura il prodotto del suo lato per la circonferenza della sezione equidistante dal vertice e dalla base.

236. *Corollario* III. Pel punto E s'innalzi sopra SA una perpendicolare che si prolunghi finchè incontri l'asse del cono nel punto H. I due triangoli SAO, SEK sono simili, perchè rettangoli ed aventi inoltre un angolo S di comune, onde si avrà.

$$SA : SO :: EH : EK.$$

Considerando EH, ed EK come raggi di due cerchi, le circonferenze di questi staranno fra loro come i raggi medesimi. ovvero come SA a SO. Laonde il prodotto della circonferenza EK pel lato SA del cono sarà uguale al prodotto della circonferenza EH per l'asse SO del cono medesimo; e perciò ne risulta che

La superficie convessa di un cono retto ha per misura il prodotto della sua altezza per la circonferenza, che ha il raggio uguale alla perpendicolare innalzata sopra un lato del cono dal punto di mezzo di questo lato, e terminata all'asse.

PROPOSIZIONE XCVI — *TEOREMA*.

237. *Le superficie convesse di due coni retti simili stanno fra loro come i quadrati delle altezze, o come i quadrati dei raggi delle basi corrispondenti* (fig. 46).

Dim. Infatti, essendo le altezze SO, so proporzionali ai raggi AO, ao, saranno simili i triangoli rettangoli SAO, sao; e perciò i lati SA, sa saranno proporzionali ai raggi AO, ao, ovvero alle circonferenze ANB, anb. Quindi risulteranno simili i triangoli rettangoli che rappresentano le superficie convesse de' due coni. Ma i triangoli simili stanno come i quadrati dei lati omologhi, dunque le superficie accennate stanno come i quadrati dei lati SA, sa, e per

conseguenza come i quadrati delle altezze *SO*, *so*, o dei raggi *AO*, *ao*. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XCVII. — *TEOREMA.*

238. *La superficie convessa del tronco di cono retto ha per misura il prodotto del lato per la semisomma delle circoferenze delle basi* (fig. 47).

Dim. Sia il tronco di cono *ABGH*. Considerando le basi come poligoni regolari di un numero infinito di lati, ne segue che il tronco proposto potrà considerarsi come un tronco di piramide regolare di un numero infinito di facce, e per conseguenza la superfiicie convessa del tronco di cono retto avrà per misura il prodotto del lato *AH* per la semisomma delle circonferenze delle due basi. *C. D. D.*

239. *Corollaio* I. Nel trapezio *AHGB* la linea *EF* che unisce i punti di mezzo dei lati non paralleli è uguale alla semisomma delle basi *AB*, *HG*, come si è dimostrato nella geometria piana; per conseguenza la circonferenza *EMF* sarà uguale alla semisomma delle circonferenze delle basi del tronco. Laonde: *la superficie convessa del tronco di cono retto ha per misura il prodotto del suo lato per la circonferenza di una sezione equidistante dalle due basi.*

240. *Corollario* II. Si abbassi dal punto *H* la perpendicolare *HP* sopra *AB*, e pel punto *E* si conduca ad *AH* una perpendicolare, che si prolunghi finchè incontri l'asse *DO* del tronco nel punto *R*. I triangoli *AHP*, *ECR* sono simili, poichè hanno i lati rispettivamente perpendicolari, per cui si ha

$$HA : HP :: ER : EC.$$

Se dunque si considerano *ER*, *EC* come raggi di due cerchi, in luogo di questi raggi si potranno mettere nella proporzione accennata le circonferenze dei cerchi medesimi; e perciò il prodotto della circonferenza *EC* pel lato *HA* sarà uguale al prodotto della circonferenza *ER* per *HP*, ovvero per l'asse *DO*. Ma il primo prodotto è la misura della superficie convessa del tronco di cono (n° 239), dunque

La superficie convessa del tronco di cono retto ha per misura il prodotto della sua altezza per la circonferenza di raggio uguale alla perpendicolare innalzata sul mezzo di un lato del tronco, e terminata all'asse.

PROPOSIZIONE XCVIII — *LEMMA.*

241. *Sieno* AB, BC, CD, *più lati successivi di un poligono regolare,* O *il suo centro, ed* OI *il raggio del cerchio iscritto. Se si supponga che la porzione di poligono* ABCD *situata da una medesima parte dell'asse* FG *giri intorno a questo, la superficie del solido prodotto dal rivolgimento del poligono avrà per misura la porzione dell'asse* MQ *moltiplicata per la circonferenza del cerchio iscritto* (fig. 50).

Dim. Dai punti A, B, C, D si abbassino sull'asse le perpendicolari AM, BN, CP, DQ; indi dal centro O si conducano sopra i lati AB, BC le perpendicolari OI, OL. che saranno raggi del cerchio iscritto. Ciò premesso, il trapezio $ABMN$ girando intorno all'asse produce un tronco di cono retto. di cui la superficie convessa ha per misura il prodotto dell'altezza MN per la circonferenza che ha OI per raggio (nº 240). Parimente si dimostra che la superficie convessa del tronco di cono, o del cilindro prodotta dal rivolgimento della figura $BCPN$ intorno all'asse ha per misura il prodotto di NP per la circonferenza OL, ovvero OI, e lo stesso si può dire della superficie convessa del tronco generato dalla rotazione del trapezio $CDQP$. Quindi la somma di queste superficie avrà per misura la porzione MQ dell'asse per la circonferenza del cerchio iscritto. *C. D. D.*

242. *Corollario.* Se il poligono intero è di un numero pari di lati, l'asse FG passerà per due vertici di esso opposti F, e G, la superficie intera descritta dal poligono $FACG$ avrà per misura il prodotto dell'asse FG per la circonferenza del cerchio iscritto. Infatti, in tal caso è manifesto che la superficie convessa del cono descritto dal triangolo FAM nel suo rivolgimento intorno all'asse, avrà per misura il prodotto di FM per la circonferenza KO del cerchio iscritto, e lo stesso dicasi del cono descritto dal triangolo DQG.

PROPOSIZIONE XCVIX — *TEOREMA.*

243. *La superficie della sfera ha per misura il prodotto della circonferenza di un circolo massimo pel diametro* (fig. 51).

Dim. Infatti, se si consideri il semicerchio ABD come un semipoligono regolare di un numero infinito di lati, la superficie descritta da questo poligono non sarà altro che la superficie sferica, ed il raggio del cerchio iscritto sarà il raggio della sfera; per conseguenza in virtù della proposizione precedente la superficie della sfera avrà per misura il prodotto della circonferenza di un circolo massimo pel diametro. *C. D. D.*

244. *Scolio.* Collo stesso ragionamento si dimostrerà facilmente che la calotta generata dal rivolgimento dell'arco AB intorno al diametro AD, e la zona a due basi prodotta dal rivolgimento dell'arco BC intorno allo stesso diametro, hanno ciascuna per misura il prodotto della circonferenza di un circolo massimo per l'altezza AE nel primo caso, ed EF nel secondo.

245; *Corollario* I. Un circolo massimo della sfera avendo per misura la sua circonferenza moltiplicata per la metà del raggio della sfera; ed essendo il diametro quadruplo della metà del raggio, ne segue che

La superficie della sfera è quadrupla di un suo circolo massimo.

246. *Corollario* II. Dal corollario precedente si deduce che

Le superficie delle sfere stanno fra loro come i quadrati dei rag-

gi o dei diametri; dappoichè i cerchi stanno come i quadrati dei raggi o dei diametri.

247. *Corollario* III. Una zona qualunque sta alla superficie della sfera come l'altezza di questa zona al diametro della sfera medesima. Or essendo la corda *AB* media proporzionale fra il diametro *AD* ed il segmento adiacente *AE*, dalla proprietà della proporzione continua ne risulta che il diametro *AD* sta ad *AE* come il quadrato di *AD* al quadrato di *AB*. Quindi la superficie della sfera sta alla calotta come il quadrato il *AD* al quadrato di *AB*, ovvero come un circolo massimo al circolo che ha per diametro *AB*. E poichè la superficie sferica è quadrupla di un suo circolo massimo, così pure la calotta sarà quadrupla del circolo che ha per diametro la corda *AB* dell'arco generatore; e però equivalente al circolo che ha per raggio la corda medesima.

CAPITOLO XVI.

DELLA MISURA DELLE SOLIDITA', O VOLUMI DEI TRE CORPI ROTONDI, E DEI RAPPORTI CHE NE DERIVANO.

248. Stabilita la misura delle superficie dei tre corpi rotondi si conosce subito la via da tenersi per arrivare alla misura dei loro volumi; nondimeno la misura del volume della sfera offre qualche difficoltà, allorchè si vuole determinarlo partendo dal principio fondamentale, cioè quello di considerare la sfera come un poliedro di un numero infinito di facce, senza deviare in certe forme di ragionamento vaghe ed inesatte, cui si dà impropriamente il nome di metodo degl'infinitamente piccoli.

PROPOSIZIONE C — *TEOREMA*.

249. *Il cilindro retto ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

Dim. Infatti, considerando il cilindro retto come un prisma retto di un numero infinito di facce, la proposizione enunciata diviene evidente; dappoichè il prisma ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza. *C. D. D.*

250. *Corollario* I. Ciò che altrove si è detto intorno ai rapporti di due prismi si applica ancora ai rapporti di due cilindri.

251. *Corollario* II. *I cilindri simili stanno come i cubi degli assi o dei diametri delle basi.*

Infatti, la ragione di due cilindri in generale è composta della ragione delle basi e di quella delle altezze, ovvero della ragione de' quadrati de' diametri delle basi e della ragione delle altezze; ma quando i cilindri sono simili la ragione delle altezze è uguale a quella dei diametri, dunque i cilindri simili sono in ragion triplicata

delle loro altezze o dei diametri delle loro basi, ossia sono come i cubi delle altezze, o de' diametri medesimi, o anche dei raggi delle basi.

PROPOSIZIONE CI — *TEOREMA*.

252. *Il cono retto ha per misura il prodotto della base pel terzo dell'altezza.*

Dim. Infatti, il cono retto si può considerare come una piramide regolare di un numero infinito di facce; ma questa ha per misura il prodotto della base pel terzo dell'altezza, dunque il cono retto avrà ancora per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza. *C. D. D.*

253. *Corollario* I. Ciò che altrove si è dimostrato intorno ai rapporti delle piramidi fra loro, e delle piramidi paragonate ai prismi si può applicare ai rapporti dei coni fra loro, e dei coni paragonati ai cilindri, fra i quali merita di esser ricordato il teorema dimostrato da Eudosso, cioè che il cono retto è la terza parte del cilindro retto della stessa base e della stessa altezza.

254. *Corollario* II. I coni simili stanno come i cubi delle loro altezze, o come i cubi dei diametri delle loro basi. La dimostrazione è come quella fatta per i cilindri simili.

PROPOSIZIONE CII — *TEOREMA*.

255. *Il tronco di cono retto a basi parallele è uguale alla somma di tre coni, che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e per base l'uno la base inferiore, l'altro la base superiore, ed il terzo una media proporzionale fra le due basi.*

Dim. Infatti, il tronco di cono retto a basi parallele si può considerare come un tronco di piramide regolare a basi parallele di un numero infinito di facce; ma il tronco di piramide si divide in tre piramidi che hanno le condizioni enunciate nella proposizione, dunque il tronco di cono si dividerà pure in tre coni che hanno le stesse condizioni. *C. D. D.*

256. *Corollario.* Da ciò ne segue che il tronco di cono retto si misura come il tronco di piramide.

PROPOSIZIONE LVI — *LEMMA*.

257. *La sfera può esser considerata come un poliedro di un numero infinito di facce* (fig. 52).

Dim. Sia A il centro della sfera; e per questo punto si faccia passare un piano ABK che tagli la sfera; indi nel circolo massimo risultante dalla sezione s'iscriva un poligono regolare, di cui un lato

sia BK; si tirino i raggi BA, KA, ed al punto A s' innalzi sul piano ABK la perpendicolare AC che si prolunghi finchè incontri la superficie sferica in un punto C. Ciò premesso, per i tre punti C, B, A si faccia passare un piano, come pure per i tre punti C, K, A, ne risulteranno gli archi di cerchio massimo CB, CK, ciascuno de' quali sarà un quadrante. S' iscrivano in questi due quadranti due porzioni di poligoni regolari perfettamente eguali: si conducano le rette OS, FR; dai punti O, S si abbassino sopra AB, ed AK le perpendicolari OV, SQ, e si unisca VQ.

Essendo i quadranti CAB, CAK eguali fra loro, ed identiche le costruzioni in essi eseguite, è chiaro che sarà $OV = SQ$, e $VB = QK$. Ma OV, SQ sono anche parallele, perchè ambedue parallele ad AC, dunque $OVSQ$ è un parallelogrammo. Da un' altra parte, poichè $VB = QK$, è quindi $AV = AQ$, anche BK sarà parallela a VQ; e però le rette BK, OK parallele alla terza VQ risulteranno parallele, ed il quadrilatero $OSBK$ sarà una figura piana. Lo stesso si dimostrerà facilmente per qualunque altro quadrilatero iscritto $FOSR$, poichè in quanto al triangolo CFR esso è sempre in un piano. Se dunque si congiungano i punti O, S, F, R col centro A della sfera, si sarà iscritto nel solido $BACK$ un poliedro composto di piramidi che hanno per basi i quadrilateri $OBKS$, $OFRS$...., ed il triangolo CFR, e per vertice comune il punto A. Facendo lo stesso per tutte le mezze ugne sferiche, si troverà iscritto nella sfera un poliedro, il quale potrà avere un numero di facce illimitato. Infatti, a misura che si raddoppia il numero de' lati de' poligoni regolari, di cui più sopra si è parlato, si viene ancora a raddoppiare il numero delle facce del poliedro; e poichè un siffatto raddoppiamento non ha alcun limite, così diviene manifesto che il numero delle facce del poliedro iscritto alla sfera può farsi tanto grande che si vuole. Quindi, allorchè i poligoni accennati avranno un numero infinito di lati, ossia si confonderanno con i circoli massimi, il poliedro iscritto avrà un numero infinito di facce, e si confonderà colla sfera, la quale in conseguenza si può considerare come un poliedro di un numero infinito di facce. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE CIV — *TEOREMA.*

258. *La sfera ha per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del suo raggio.*

Dim. Per la proposizione precedente si può considerare la sfera come un poliedro di un numero infinito di facce, ciascuna delle quali potrà considerarsi come base di una piramide che ha il vertice al centro della sfera. Quindi la sfera è la riunione di una infinità di piramidi, delle quali le basi compongono la superficie sferica, e l'altezza di ciascuna è uguale al raggio. Ma ogni piramide ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza,

dunque la sfera avrà per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del suo raggio. *C. D D.*

259. *Corollario* I. Dal teorema precedente si deduce che la sfera è equivalente ad un cono, di cui la base è il quadruplo di un cerchio massimo, e l'altezza è uguale al raggio della sfera.

260. *Corollario* II. *Le sfere stanno fra loro come i cubi dei raggi. o dei diametri.*

Infatti, le sfere stanno in ragion composta dalla ragione delle loro superficie, e dalla ragione dei raggi. Ma la prima ragione è duplicata di quella dei raggi, dunque le sfere stanno in ragion triplicata degli stessi raggi, ovvero come i cubi dei raggi, o dei diametri.

PROPOSIZIONE CV — *TEOREMA.*

261. *Il settore sferico ha per misura il prodotto della zona che gli serve di base pel terzo del raggio* (fig. 53).

Dim. Perocchè, in virtù del lemma precedente (n° 257) il settore sferico, generato dal rivolgimento del settore circolare *ABO* intorno al diametro *AD*, può considerarsi composto di una infinità di piramidi, delle quali le basi formano la calotta descritta dall'arco *AB*, e l'altezza comune è uguale al raggio. Quindi il settore sferico avrà per misura il prodotto della calotta pel terzo del raggio. *C. D. D.*

262. *Corollario* I. Essendosi dimostrato (n° 247) che la calotta descritta dall'arco *AB*,(fig. 54) è equivalente al circolo che ha per raggio la corda *AB*, il settore sferico descritto dal settore circolare *ABO* sarà equivalente al cono che ha per altezza il raggio *AO* della sfera, e per base un cerchio, di cui il raggio è uguale alla corda *AB* dell'arco generatore della calotta che serve di base al settore.

Se il settore sferico fosse destritto dal settore circolare *BCO* maggiore del quadrante , esso sarebbe equivalente al cono che ha per altezza il raggio *OC* della sfera, e per base il cerchio , di cui il raggio è uguale alla corda *BC* dell arco generatore della calotta che serve di base al settore.

263. *Corollario* II. Essendo il quadrato di *AB* uguale ai quadrati di *AE*, *EB*, il cerchio che ha per raggio *AB* sarà uguale ai cerchi, che hanno per raggi *AE*, *EB*; per conseguenza il cono che ha per base il cerchio di raggio *AB*, e per altezza *AO*, ovvero il settore sferico prodotto dal rivolgimento del settore circolare *ABO*, sarà uguale alla somma di due coni. che hanno la medesima altezza *AO*, e per basi i cerchi dei raggi *AE*, *EB*.

PROPOSIZIONE CVI — *TEOREMA.*

264. *Il segmento sferico ad una base è equivalente al cono, che ha per base il cerchio, di cui il raggio è l'altezza del segmento, e per asse la rimanente parte del diametro accresciuta del raggio* (fig. 54).

Dim. Si consideri il segmento sferico generato dal rivolgimento del mezzo segmento circolare *ABE* intorno ad *AE*. Essendo il settore sferico generato dal settore circolare *ABO* uguale alla somma di due coni, che hanno per basi i cerchi de' raggi *AE*, *EB*, e per altezza *AO* (n° 163), se si tolga di comune il cono prodotto dal rivolgimento del triangolo *BEO* intorno ad *EO*, il segmento sferico proposto sarà uguale alla somma di due coni, de' quali il primo ha per base il cerchio di raggio *AE*; e per altezza *AO*, ed il secondo ha per base il cerchio di raggio *BE*, e per altezza *AE*; poichè il cono che ha per base il cerchio di raggio *BE*, e per altezza *AO* è uguale alla somma dei due coni che hanno per base il cerchio accennato, e per altezza le rette *AE*, *EO*. Or essendo *BE* media proporzionale fra i due segmenti *AE*, *EC* del diametro, il quadrato di *AE* starà al quadrato di *BE* come *AE* ad *EC*. Quindi il cerchio di raggio *AE* starà al cerchio di raggio *BE* come *AE* ad *EC*, e facendo in questa proporzione il prodotto degli estremi e quello dei medii, ne risulterà che il cono il quale ha per base il primo di quelli cerchi, e per altezza *EC* sarà equivalente al cono che ha per base il secondo cerchio, e per altezza *AE*. Dalle cose fin qui esposte si deduce che il segmento sferico proposto è uguale alla somma di due coni, dei quali ciascuno ha per base il cerchio di raggio *AE*, ma il primo ha per altezza *AO*, ed il secondo *EC*; e per conseguenza il segmento medesimo sarà equivalente al cono che ha per base il cerchio, di cui il raggio è l' altezza *AE* del segmento, e per asse la rimanente parte *EC* del diametro accresciuto del raggio *AO*. *C. D. D.*

265. *Scolio* I. Se il segmento sferico ad una base fosse maggiore dell' emisfero, come sarebbe quello prodotto dal rivolgimento del mezzo segmento circolare *EBC* intorno ad *EC*, avrebbe luogo la stessa dimostrazione fatta qui sopra, solamente in vece di sottrarre il cono generato dal triangolo *BEO*, si deve aggiungere al settore sferico generato dal settore circolare *CBO*.

266. *Scolio* II. Se il segmento sferico avesse due basi, come quello descritto dalla porzione di cerchio *BCFE* (fig. 53) si otterrà il suo volume osservando che esso è sempre la differenza di due segmenti sferici, dei quali ciascuno ha una sola base, come sarebbero i segmenti sferici descritti dai mezzi segmenti circolari *ACF*, *ABE*.

267. *Scolio* III. Merita ancora di essere osservato che

Il volume di un segmento sferico ad una base ha per misura il prodotto del cerchio, che avrebbe per raggio l'altezza di questo segmento, pel raggio della sfera diminuito del terzo di quella altezza.

Questa espressione del volume del segmento sferico equivale a quella data nel teorema precedente. Infatti, la porzione *EC* del diametro *AC* (fig. 54) coll' aggiunta del raggio *AO* equivale a tre volte il raggio *AO* meno l' altezza *AE* del segmento ; per conseguenza il cono che ha per base il cerchio di raggio *AE*, e per asse la rimanente porzione *EC* del diametro con l'aggiunta del raggio *AO*, avrà per misura il cerchio di raggio *AE* moltiplicato pel raggio *AO* diminuito del terzo di *AE*.

CAPITOLO XVII.

DELLE RAGIONI, CHE HA LA SFERA COL CILINDRO, E COL CONO AD ESSA CIRCOSCRITTI.

PROPOSIZIONE CVII — *TEOREMA*.

268. *Il cilindro retto sta alla sfera cui è circoscritto come 6: 4, tanto rispetto alla superficie totale, quanto alla solidità* (fig. 55).

Dim. Sia *DFPE* un quadrato circoscritto al circolo *AGBH* ; i diametri *AB*, *GH* saranno l' uno perpendicolare all'altro ; e dal simultaneo rivolgimento del semicircolo *AGB* , e del semiquadrato *ADEB* intorno ad *AB* si produrrà una sfera , ed un cilindro retto ad essa circoscritto, il quale ha le basi uguali a due circoli massimi della sfera medesima ; poichè il diametro *EP*, o *DF* di ciascuna di queste basi è uguale al diametro *GH* della sfera. Da ciò si deduce che la supérficie convessa del cilindro circoscritto alla sfera è uguale alla superficie di questa sfera , essendo l' una e l' altra espressa dal prodotto della circonferenza di un circolo massimo per l' asse *AB*. Ma la superficie della sfera equivale a quattro circoli massimi (n° 245), dunque se alla superficie convessa del cilindro si uniscono le due basi, la superficie totale del cilindro sarà uguale a sei circoli massimi ; e però la superficie del cilindro circoscritto starà a quella della sfera come 6 : 4.

Venendo ora alle solidità, si osservi che il cilindro ha per misura il prodotto della base, che è un cerchio massimo, pel diametro *AB*, ovvero per 6/3 del raggio *CB*; e che la sfera ha per misura la sua superficie moltiplicata per 1/3 dello stesso raggio; il che equivale al prodotto di un cerchio massimo per 4/3 del raggio, essendo la superficie sferica uguale a quattro circoli massimi. Laonde il cilindro starà alla sfera come 6/3 a 4/3, ossia come 6 : 4. *C. D. D.*

269. *Scolio* I. Dal teorema precedente apparisce che nei due solidi, cioè il cilindro retto circoscritto alla sfera e la sfera, i volumi stanno fra loro come le superficie totali. Archimede apprezzò a tal segno questa sua scoperta da volere che in vece del proprio nome si scolpisse sulla sua tomba un cilindro circoscritto alla sfera.

270. *Scolio* II. Merita ancora di essere osservato che se il cilindro e la sfera si segano con piani perpendicolari all' asse *AB*, i singoli segmenti della superficie convessa del cilindro saranno equivalenti ai singoli segmenti della superficie sferica. Così, per esempio, la calotta generata dal rivolgimento del mezzo segmento circolare *Bor* intorno a *Br* è equivalente alla superficie convessa del cilindro generato dal rettangolo *EBrm*; dappoichè hanno la stessa misura , cioè la circonferenza di un circolo massimo per l' altezza *Br*.

PROPOSIZIONE CVIII — *TEOREMA*.

271. *Il cono sta alla sfera cui è circoscritto come 9: 4, tanto rispetto alla superficie totale, quanto alla solidità* (fig. 56).

Dim. Sia *SAD* un triangolo equilatero circoscritto al cerchio *EBF*, nel simultaneo rivolgimento del semicircolo *EBH*, e del triangolo *SBA* intorno a *SB*, si avrà un cono retto circoscritto ad una sfera. Or sesi congiunga il punto *A* col centro *C*, la retta *AC* dividerà in due parti uguali l'angolo formato dalle due tangenti *AE*, *AB*; ma la retta *SB* divide ancora per metà l'angolo *ESF*, dunque i due triangoli *SAB*, *ACB* sono equiangoli; e perciò simili, e si avrà

SA : *AB* : : *AC* : *CB*.

Laonde essendo *SA* doppia di *AB*, sarà ancora *AC* doppia del raggio *CB*; e per conseguenza il quadrato di *AC* risulterà quadruplo del quadrato di *CB*. Ma da un' altra parte il quadrato di *AC* è uguale ai quadrati di *AB*, *CB*; poichè è retto l'angolo *ABC*, dunque il quadrato di *AB* è triplo del quadrato di *CB*; e perciò il cerchio che serve di base al cono sarà triplo di un cerchio massimo.

Ciò premesso, si osservi che la superficie convessa del cono ha per misura la circonferenza della base per *AE*, che è la metà del lato *SA* del cono, ovvero ha per misura la circonferenza della base pel raggio *AB* della base medesima; per conseguenza la superficie convessa del cono sarà doppia di quella base, la quale essendo uguale a tre cerchi massimi, ne risulterà infine che la superficie convessa del cono è uguale a sei cerchi massimi, e perciò la superficie totale del cono sarà uguale a nove cerchi massimi. Laonde la superficie totale del cono starà a quella della sfera come 9 : 4.

Lo stesso rapporto sussiste per i volumi. Infatti, il cono ha per misura la sua base pel terzo della sua altezza *SB*, ovvero ha per misura il prodotto di tre cerchi massimi pel raggio *CB*, oppure di un cerchio massimo per 9/3 del raggio *CB*. Ma la sfera ha per misura la sua superficie pel terzo del raggio *CB*, ovvero quattro cerchi massimi pel terzo del raggio *CB*, o infine un cerchio massimo per 4/3 del raggio *CB*, dunque il cono sta alla sfera come 9/3 a 4/3, ossia come 9 : 4. *C. D. D.*

272. *Scolio* I. Dalle due proposizioni precedenti si deduce che il cilindro circoscritto alla sfera è medio proporzionale fra la sfera ed il cono ad essa circoscritto, tanto rispetto alla superficie, quanto alla solidità perchè i tre numeri 9, 6, e 4 formano una proporzione continua. Osservando che il lato del quadrato iscritto al cerchio sta al raggio come la radice di 2 sta all'unità; e che il lato del triangolo equilatero iscritto sta al raggio come la radice di 3 sta all'unità, si potrebbe dimostrare che il rapporto sopraccennato ha ancora luogo pel cilindro e pel cono iscritto; ma non possiamo qui occuparci di questa dimostrazione.

273. *Scolio* II. Si è visto (n° 257) come può iscriversi in una sfera un poliedro per mezzo di un poligono regolare. Or è manifesto che

si potrebbe concepire un poliedro simile di cui tutte le facce fossero tangenti alla sfera ; in tal caso il poliedro accennato potrà considerarsi come composto di piramidi aventi per altezza comune il raggio della sfera, e per basi le differenti facce del poliedro. Quindi il volume del poliedro medesimo si avrà con moltiplicare la sua superficie pel terzo del raggio della sfera iscritta;ma questa ha per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del raggio, dunque le solidità dei poliedri circoscritti alla sfera stanno tra loro ed alla solidità della sfera come le superficie di questi medesimi solidi , e per conseguenza la proprietà dimostrata (n° 268) pel cilindro circoscritto alla sfera appartiene ad una infinità di altri solidi. Infine giova osservare che siffatta proprietà è analoga a quella che hanno i poligoni circoscritti ad uno stesso cerchio; poichè le aje di questi poligoni stanno come i loro perimetri.

CAPITOLO XVIII.

DEI TRIANGOLI SFERICI

274. *Triangolo sferico* (fig. 57) dicesi la parte della superficie della sfera compresa fra tre archi di tre circoli massimi AB, AC, BC.

275. I *lati* di un triangolo sferico sono gli archi che formano il suo perimetro. Gli *angoli* poi sono gli angoli dei piani in cui si trovano i loro lati.

276. Dalla definizione precedente consegue che un angolo di un triangolo sferico sarà retto , o acuto , o ottuso , secondo la specie dell' angolo diedro formato dai due piani, ne' quali si trovano i suoi lati. E poichè un angolo diedro è misurato dall' angolo piano, che formano le due perpendicolari condotte sopra lo spigolo da un medesimo punto di questo, l' una in una faccia, e l' altra nell' altra, perciò un angolo di un triangolo sferico sarà misurato dall'angolo compreso fra le due rette condotte pel vertice rispettivamente tangenti ai suoi lati.

277. Se si congiungono i tre vertici A, B, C, col centro S della sfera per mezzo dei raggi AS, BS, CS, si formerà un angolo triedro $SABC$ che avrà questo centro per vertice. I suoi angoli diedri saranno precisamente gli angoli del triangolo sferico ABC, ed i suoi angoli piani avranno per misura i lati di questo triangolo , poichè questi lati si possono considerare come descritti col centro comune in S, e collo stesso raggio. Quindi tutte le quistioni relative alla comparazione dei triangoli sferici si riducono a quistioni relative alla comparazione degli angoli triedri. Reciprocamente le proposizioni spettanti agli angoli triedri si applicano ai triangoli sferici con un semplice cangiamento di nomi ; dicendo *lati* in luogo di *angoli piani ed angoli* in luogo di *angoli diedri*.

278. Abbenchè si possano concepire descritti sulla superficie della sfera triangoli formati da tre archi di tre circoli minori ; pure di questi non si fa parola negli elementi di geometria, perchè essendo

disuguali i circoli minori, i loro archi non hanno una costante curvatura, come avviene negli archi de' circoli massimi. Oltracciò *un arco* DL *di circolo massimo minore della semicirconferenza è la minima distanza sulla superficie sferica tra i due punti* D, e L. (fig. 48.)

Infatti, il piano di questo arco divide la sfera in due emisferi; e perciò se al di sopra del piano DLC esistesse una distanza minore dell' arco DL, dovrebbe esistere una simile distanza anche al disotto del piano accennato, poichè rispetto a questo piano la condizione de' due emisferi è *identica*; ed allora tra i punti D, e L vi sarebbero due minime distanze; il che non può sussistere.

Quindi essendo l' arco di circolo massimo la misura di ogni distanza sferica, anche per questa ragione si adoperano i soli archi di circoli massimi per lati de' triangoli sferici.

279. Se nel centro di una sfera si situano due angoli triedri supplementarj (n° 69), i triangoli sferici, determinati dalle intersezioni delle facce di questi angoli colla superficie sferica, si dicono *triangoli supplementarj*. Quindi si vede che ogni triangolo sferico ha il suo supplementario, cioè che ad ogni triangolo sferico corrisponde un altro di cui i lati, e gli angoli sono rispettivamente supplementi degli angoli, e lati del primo.

280. Se in un triangolo sferico ABC (fig. 25), si uniscano i tre vertici A, B, C col centro S della sfera, e si prolunghino i raggi AS, BS, CS finchè incontrino di nuovo la superficie della sfera nei punti A' B' C'; indi si conducano gli archi di circoli massimi $A'C'$, $A'B'$, $B'C'$; il triangolo $A'B'C'$ sarà simmetrico al triangolo ABC. Infatti, gli angoli triedri $SABC$, $SA'B'C'$ sono simmetrici (n° 74), ossia hanno i loro elementi uguali due a due senza poter coincidere; perciò lo stesso deve aver luogo per i triangoli ABC, $A'B'C'$. Quindi due triangoli sferici sono *simmetrici*, quando essendo descritti sopra una stessa sfera, o sopra sfere uguali, gli angoli triedri corrispondenti sono simmetrici.

281. E poichè un angolo triedro non può avere che un solo simmetrico, così ne risulta che un triangolo sferico non può avere che un solo triangolo simmetrico. Finalmente è manifesto che nei triangoli sferici isosceli non si dà uguaglianza per simmetria, ma sempre uguaglianza propriamente detta, vale a dire che se due triangoli sferici isosceli sono uguali, l'uno potrà coincidere coll'altro.

282. Il *polo* di un circolo della sfera è un punto della superficie sferica, il quale è ugualmente distante da tutti i punti della circonferenza di questo cerchio.

283. Il diametro della sfera, il quale è perpendicolare al piano di un circolo massimo, dicesi *asse* dello stesso circolo.

284. È facile ora vedere che le estremità A, e B (fig. 48) dell'asse del circolo massimo DLC sono i poli non solo dello stesso circolo, ma ancora di tutti i circoli minori, come MKN, ad esso paralleli.

Infatti, essendo AO perpendicolare al piano DLC, le corde AD, AL, AC, ecc. saranno uguali come oblique che si allontanano ugual-

mente dalla perpendicolare ; e perciò saranno uguali gli archi *AD*, *AL*, *AC*, ecc. Lo stesso si verifica per gli archi *BD*, *BL*, *BC*,ecc. : per conseguenza i punti *A*, e *B* sono i poli del circolo massimo *DLC*, in secondo luogo, essendo *AO* perpendicolare al piano *DCL*, sarà pure perpendicolare al piano *MKN* ad esso parallelo ; e però dovrà passare pel centro *E* di questo cerchio (n° 216). Se dunque si tirino le corde *AM*, *AK*, *AN*, ecc., queste saranno uguali; come pure gli archi sottesi da queste corde. Laonde il punto *A* è polo del circolo minore *MKN*, e lo stesso potrà dimostrarsi pel punto *B*.

285. Dalle cose precedenti risulta manifesto che due circoli massimi non possono avere uno stesso polo; dappoichè congiungendo questo polo col centro comune, la retta congiungente sarebbe perpendicolare in uno stesso punto a due piani diversi; il che non può sussistere. Oltre a ciò, è evidente che se per i poli di un circolo massimo *DCL* si faccia passare un altro circolo *ALB*, ciascuno degli archi *AL*, *BL* sarà un quadrante; ed il suo piano sarà perpendicolare al piano *CDL*. Quindi il triangolo sferico *ADL* ha due angoli retti, cioè gli angoli *LDA*, *DLA*; che perciò sarà un triangolo sferico *birettangolo*, Or se si suppone che l'arco *DL* sia esso pure un quadrante,l'angolo *DOL* sarebbe retto ; ma quest'angolo misura l'angolo formato dai due piani *LOA*, *DOA*, dunque l'angolo *DAL* del triangolo sferico sarebbe ancora retto, ed il triangolo sferico accennato sarebbe *trirettangolo*.

Da ciò si deduce che la supèrficie della sfera si può decomporre in otto triangoli sferici trirettangoli. Se ne deduce ancora che un angolo sferico *DAL* ha per misura l'arco *DL* compreso fra i suoi lati, e descritto dal suo vertice *A* come polo alla distanza di un quadrante.

286. Per le proprietà dei poli riesce agevole descrivere sulla superficie della sfera archi di cerchio come sopra un piano. Infatti, se si ponga la punta di un compasso in *A*, e con un dato intervallo *AF* si faccia girare il compasso intorno ad A, la seconda punta descriverà la circonferenza *FPG*. Se l'intervallo è uguale al quadrante *AD*, in tal caso si descriverà la circonferenza del circolo massimo *DLC*.

287. Volendosi descrivere su la superficie della sfera un arco di circolo massimo che passi per due punti dati *D*,e *L*,basterà trovare il polo dell'arco accennato. A tal uopo, da ciascuno dei punti *D*, *L* come poli, e coll'intervallo di un quadrante si descrivano sopra la superficie sferica due archi che si taglieranno in un punto *A*;gli archi *AD*, *AL* saranno quadranti; e perciò gli angoli *AOD*, *AOL* saranno retti, la retta *AO* sarà perpendicolare al piano *DOL*, ed il punto *A* sarà il polo del circolo massimo *DLC* che passa per i due punti dati *D*, e *L*. Se dunque col punto *A* come polo, e coll'intervallo di un quadrante si descriva un arco, questo passerà per i punti *D*, e *L*.

288 In virtù delle stesse proprietà dei poli, da un punto *P* dato su la superficie della sfera si potrebbe condurre un arco di circolo massimo perpendicolare ad un arco dato *DL*. Ciò si otterrà descrivendo dal punto *P* come polo, e con un quadrante come intervallo, un arco che taglierà l'arco *DL*, prolungato se occorra, in un punto

C; indi da qnesto punto come polo, e collo stesso intervallo, si descriverà l'arco *PL* che sarà l'arco richiesto. Infatti, essendo *CL* un quadrante, l'angolo *CLA* sarà retto (n° 285); e per conseguenza l'arco *PL* sarà perpendicolare all'arco *DL*.

289. Per tre punti *A*, *B*, *C* situati sulla superficie sferica può sempre passare una circonferenza di cerchio. Imperocchè, si facciano passare per questi punti gli archi di circolo massimo *AB*, *BC*; indi si divida ciascun arco in due parti uguali, e per i punti di mezzo si conducano archi di circoli massimi perpendicolari agli archi *AB*, *BC*, il loro punto d' incontro sulla superficie sferica sarà ugualmente distante da' tre punti dati *A*, *B*, *C*, come è facile vedere per l'uguaglianza de' triangoli rettangoli che ne risultano. Se dunque si prenda per polo il punto d'incontro accennato, e per intervallo una di quelle distanze si potrà descrivere una circonferenza che passerà per i tre punti dati. Ciò premesso, il ciccolo che passa per i tre vertici *A*, *B*, *C* del triangolo sferico (fig. 57) è sempre un circolo minore. Infatti, se fosse un circolo massimo, l'arco *AB* si dovrebbe confondere con la circonferenza di questo circolo, poichè per due punti *A*, e *B* non può passare che un solo circolo massimo. Lo stesso avrebbe luogo per gli archi *AC*, *BC*; e per conseguenza il triangolo *ABC* si troverebbe cangiato in un arco di circolo massimo; il che non può sussistere.

290. Se si prolunghi il lato *BC*, (fig. 58) del triangolo sferico *ABC*, e si formi l'intiera circonferenza, si avrà un secondo triangolo, di cui i lati saranno gli archi *AB*, *AC*, e l'arco *BcbC*; questo triangolo corrisponde a un angolo triedro, nel quale l'angolo piano misnrato dall arco *BcbC* è maggiore di una mezza circonferenza. Similmente si potrebbero prolungare due lati, ed anche tutti tre i lati del triangolo *ABC*, e formare in tal modo triangoli, nei quali vi sarebbero due o tre lati maggiori di una mezza circonferenza. Ma è facile vedere che se si toglie ciascuno di questi lati da una circonferenza intera si ritorna al triangolo *ABC*, in cui ciascun lato è minore di una mezza circonferenza. Perlochè la cognizione degli elementi del triangolo *ABC* basta a determinare quelli, per esempio, del triangolo formato dagli archi *AB*, e *AC*, e dall'arco *BcbC* maggiore di una mezza circonferenza. Per questa ragione si considerano soltanto quei triangoli sferici, nei quali ciascun lato è minore della mezza circonferenza.

Caratteri dell' uguaglianza dei triangoli sferici.

291. Paragonando i triangoli sferici cogli angoli triedri corrispondenti, e richiamando ciò che è stato dimostrato (n° 72, e 77, 78, 79), ne risulterà che due triangoli sferici descritti su la medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono uguali o simmetrici, se hanno:

1°. *I tre lati uguali ciascuno a ciascuno.*

2°. *Un angolo uguale compreeo fra due lati uguali ciascuno a ciascuno.*

3°. *Un lato uguale adiacente a due angoli uguali ciascuno a ciascuno.*

4°. *I tre angoli uguali ciascuno a ciascuno.*

Questa ultima proposizione non ha luogo nei triangoli rettilinei, nei quali se gli angoli sono uguali, i lati non sono uguali, ma sono proporzionali. Al contrario nei triangoli sferici, che hanno gli angoli uguali, e sono descritti sopra la stessa sfera, o sopra sfere uguali, se i lati fossero proporzionali, essi diverrebbero uguali come archi simili di circonferenze i cui raggi sono uguali. Quindi nei triangoli sferici descritti sopra la stessa sfera, se gli angoli sono uguali, i triangoli non saranno simili; ma o uguali, o simmetrici; saranno però simili, se posta l'uguaglianza degli angoli, sono descritti sopra sfere di diverso raggio.

Proprietà dei triangoli sferici.

PROPOSIZIONE CIX — *TEOREMA.*

292. *In ogni triangolo sferico un lato qualunque è minore della somma degli altri due* (fig. 57).

Dim. Perocchè nell'angolo triedro corrispondente *SABC* ciascun angolo piano è minore della somma degli altri due; e per conseguenza ciascuno degli archi *AC*, *AB*, *BC* che misurano questi angoli è minore della somma degli altri due. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE CX — *TEOREMA.*

293. *La somma dei tre lati di un triangolo sferico è minore della circonferenza di un circolo massimo* (fig. 57).

Dim. Infatti, essendo nell'angolo triedro *SABC* la somma dei tre angoli piani minore di quattro angoli retti, la somma dei lati del triangolo sferico *ABC* che misurano i detti angoli piani dovrà essere minore di una circonferenza di circolo massimo che misura i quattro angoli retti. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE CXI — *TEOREMA.*

294. *La somma degli angoli di ogni triangolo sferico è minore di sei, e maggiore di due angoli retti* (fig. 57).

Dim. Infatti, ciascun angolo di un triangolo sferico *ABC* è minore di due retti; e perciò la somma dei tre angoli è minore di sei retti. Di più, ciascun angolo del triangolo *ABC* è il supplemento di un lato del triangolo sferico supplementario (n° 297), e per conseguenza equivale ad una mezza circonferenza meno questo lato. Dunque la somma dei tre angoli del triangolo *ABC* vale tre mezze

circonferenze meno i tre lati del triangolo supplementario. Or questi tre lati valgono meno di due mezze circonferenze (n° 67); per conseguenza se da tre mezze circonferenze si toglie una quantità minore di due mezze circonferenze, il resto sarà maggiore di una mezza circonferenza. Quindi la somma dei tre angoli del triangolo *ABC* avrà per misura un arco maggiore di una mezza circonferenza; e però la detta somma sarà maggiore di due angoli retti. *C.D.D.*

295. *Corollario.* Dal teorema precedente apparisce che la somma dei tre angoli di un triangolo sferico non è costante come quella dei tre angoli di un triangolo rettilineo; ma varia da due sino a sei angoli retti senza mai uguagliare nè l'uno nè l'altro limite. Laonde essendo dati due angoli di un triangolo sferico non si può trovare il terzo angolo: e così pure è manifesto che l'angolo esterno di un triangolo sferico non è uguale, ma minore della somma dei due interni ed opposti.

PROPOSIZIONE CXII — *TEOREMA.*

296. ***In ogni triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali. Reciprocamente se due angoli di un triangolo sferico sono uguali, i lati ad essi opposti saranno pure uguali*** (fig. 59).

Dim. Sia *ABC* un triangolo sferico isoscele, nel quale si supponga $AB = AC$. Si divida la base in due parti uguali nel punto *D*, e si faccia passare l'arco di circolo massimo *AD*; si avranno i due triangoli *ABD*, *ACD*, nei quali essendo i tre lati rispettivamente uguali, sarà l'angolo $B = C$.

In secondo luogo, supponendo che *abc* sia il triangolo supplementario del triangolo proposto, dall'essere $B = C$ si deduce $ac = ab$; e quindi sarà l'angolo $b = c$; dal che infine risulta l'uguaglianza dei lati *AC*, *AB*. *C. D. D.*

297. *Corollario.* Apparisce da questo teorema che

1°. ***Un triangolo sferico equilatero è anche equiangolo, e reciprocamente.***

2°. ***In un triangolo sferico isoscele l'arco di circolo massimo condotto dal vertice al punto di mezzo della base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice in due parti uguali.***

PROPOSIZIONE CXIII — *TEOREMA.*

298. ***In ogni triangolo sferico il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore del lato opposto all'angolo minore; e reciprocamente*** (fig. 60).

Dim. Sia in primo luogo l'angolo *B* maggiore dell'angolo *A*, sarà il lato *AC* maggiore del lato *CB*. Infatti si conduca l'arco di circolo

massimo BD in guisa che risulti l'angolo $ABD = A$ (*) : in virtù della proposizione precedente si avrà $BD = AD$. Ma nel triangolo BDC, il lato BC è minore della somma dei lati BD, DC, ovvero di $AD + DC$; dunque AC è maggiore di CB.

In secondo luogo, sia il lato AC maggiore del lato CB, sarà l'angolo B maggiore dell'angolo A; poichè se fosse minore, o uguale, nel primo caso sarebbe il lato AC minore del lato CB, e nel secondo caso si avrebbe $AC = CB$, contro la supposizione in ambedue i casi; per conseguenza dev' essere l'angolo B maggiore dell'angolo A. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE CXIV — *TEOREMA*.

299. *Se due triangoli sferici, descritti su la stessa sfera, o sopra sfere uguali, hanno due lati uguali respettivamente a due lati, ma l'angolo compreso dai due primi è maggiore dell' angolo compreso dai due secondi, sara il terzo lato del primo triangolo maggiore del terzo lato del secondo; e reciprocamente.*

La dimostrazione è simile a quella fatta pel caso analogo nei triangoli rettilinei.

PROPOSIZIONE CXV — *TEOREMA*.

300. *Due triangoli sferici simmetrici sono equivalenti* (fig. 61).

Dim. Sieno ABC, DEF due triangoli sferici simmetrici, nei quali il lato $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$; dico che l'aja del triangolo ABC è uguale a quella del triangolo DEF. Infatti, i lati dei due triangoli essendo uguali, le corde da essi sottese saranno pure uguali e formeranno triangoli rettilinei uguali; per conseguenza i circoli circoscritti a questi triangoli saranno uguali. Quindi se per i poli O, e P di questi circoli si conducano archi di circoli massimi agli angoli dei triangoli proposti, questi archi saranno uguali (n° 285); e si formerà in questo modo sopra ciascun lato un triangolo sferico isoscele. Or i tre triangoli isosceli del primo dei triangoli dati saranno evidentemente uguali ai tre del secondo, ciascuno a ciascuno; poichè nei triangoli isosceli non esiste ugnaglianza per simmetria (n° 281), dunque le aje dei triangoli proposti saranno formate nello stesso modo con quelle dei nuovi triangoli e però i triangoli proposti saranno equivalenti. *C. D. D.*

301. *Scolio.* Se i poli O, e P dei circoli circoscritti ai triangoli

(*). Ciò è sempre possibile. Infatti, si divida l'arco AB in due parti uguali, e pel punto di mezzo si faccia passare un arco di circolo massimo perpendicolare ad AB, che incontri l' arco AC nel punto D; indi per questo punto e pel punto B si faccia passare un arco di circolo massimo DB, risulteranno due triangoli rettangoli uguali, e però sarà l'angolo $ABD = A$.

cadessero fuori di questi, la dimostrazione sarebbe sempre la stessa, come è facile vedere.

Misura del triangolo sferico.

PROPOSIZIONE CXVI — *TEOREMA.*

302. *Il fuso sta alla superficie della sfera come l'angolo dei semicircoli massimi che comprendono il fuso sta a quattro angoli retti* (fig. 62):

Dim. Sia il fuso *AMBN* compreso dai due semicircoli massimi *AMB*, *ANB* che terminano al diametro comune *AB*. L'angolo *MAN* formato dai due archi *AM*, *AN*, e che dicesi *angolo del fuso*, può essere misurato (n° 285) dall'angolo *MON*, ovvero dall'arco *MN* del circolo massimo *MNP*, che ha per asse il diametro *AB*. Oltre a ciò, è evidente che sopra una medesinna sfera due fusi sono uguali quando i semicircoli che li comprendono formano tra loro angoli uguali. Ciò premesso, è facile dimostrare la proposizione enunciata. Infatti, supponiamo in primo luogo che l'arco *MN* sia commensurabile colla circonferenza *MNP*; e che stia a questa come 3 a 12. Dividendo la circonferenza in 12 parti uguali, l'arco *MN* conterrà 3 di queste parti; poi facendo passare per i punti di divisione, e per i punti *A*, *B*, 12 circoli massimi, la superficie sferica sarà decomposta in 12 fusi uguali, 3 dei quali saranno contenuti nel fuso *AMBN*. Quindi il fuso accennato sta alla superficie sferica come l'arco *MN* alla circonferenza *MNP*, oppure come l'angolo *MAN* del fuso sta a quattro angoli retti.

Se l'arco *MN* fosse incommensurabile colla circonferenza, la proposizione enunciata si dimostrerebbe col ragionamento fatto nella geometria piana in un caso analogo (*). *C. D. D.*

303. *Scolio.* È manifesto che colla stessa dimostrazione si potrebbe provare che l'unghia sferica *AMBN* sta alla sfera come l'arco *MN* sta alla circonferenza *MNP*.

PROPOSIZIONE CXVII — *TEOREMA.*

304. *Il fuso ha per misura il prodotto del suo arco moltiplicato pel diametro della sfera; e l'unghia ha per misura il prodotto del fuso moltiplicato pel terzo del raggio della sfera medesima.* (fig. 62).

Dim. Imperocchè, si ha dalla proposizione precedente che il fuso *AMBN* sta alla superficie sferica come l'arco *MN* alla circonferenza *MNP*; per conseguenza il fuso accennato sta alla superficie sferica come l'arco *MN* moltiplicato pel diametro *MP* sta alla circon-

(*) Vedi Geom. Piana n.° 341, 2.ª Ediz.

ferenza *MNP* moltiplicata per lo stesso diametro. Ma la circonferenza *MNP* moltiplicata pel suo diametro è la misura della superficie sferica, dunque il fuso ha per misura l'arco *MN*, che misura il suo angolo, moltiplicato pel diametro della sfera.

In secondo luogo, essendo l'unghia sferica alla sfera come il fuso alla superficie sferica, sarà l'unghia alla sfera come il fuso moltiplicato pel terzo del raggio della sfera sta alla superficie sferica moltiplicata pel terzo dello stesso raggio. Ma la superficie sferica moltiplicata pel terzo del raggio della sfera è la misura di questa, dunque l'unghia avrà per misura il fuso moltiplicato pel terzo del raggio della sfera. *C. D. O.*

305. *Corollario* I. Il settore circolare *MON* avendo per misura il prodotto dell'arco *MN* per la metà del raggio *MO*, sarà in virtù della proposizione precedente il fuso *AMBN* quadruplo del detto settore. Quindi il triangolo sferico birettangolo *AMN*, che è metà del fuso, sarà doppio dello stesso settore circolare. Che se poi il triangolo *AMN* fosse trirettangolo, allora la sua aja sarebbe uguale a quella di un semicircolo massimo, cioè sarebbe la ottava parte della superficie sferica; e per conseguenza la superficie sferica potrà essere rappresentata da otto triangoli sferici trirettangoli.

306. *Corollario* II. Se dunque si prenda per unità delle superficie sferiche il triangolo trirettangolo, che chiameremo *K*, e per unità di angolo l'angolo retto, che chiameremo *R*, si avrà la proporzione qui appresso.

$$\text{Fuso } AMBN : 8K : : \text{arco } MN : \text{circ. } MNP,$$

ovvero, chiamando *A* l'angolo del fuso,

$$\text{Fuso } AMBN : 8K : : A : 4R,$$

e moltiplicando per 2 i termini della seconda ragione,

$$\text{Fuso } AMBN : 8K : : 2A : 8R,$$

e dividendo per 8 i conseguenti.

$$\text{Fuso } AMBN : K : : 2A : R.$$

Ma in luogo di *K*, e *R* si possono mettere le unità che rappresentano, dunque si avrà in fine.

$$\text{Fuso } AMBN = 2A.$$

vale a dire che il *fuso è uguale al doppio del suo angolo.*

Questa espressione è di pura convenzione; poichè essa serve a dinotare sotto forma abbreviata la proporzione or ora ottenuta, cioè che il fuso sta al triangolo trirettangolo, che è l'unità superficiale, come il doppio dell'angolo del fuso sta all'angolo retto, che è l'unità angolare. La differenza sta dunque in questo; cioè, che nella proporzione le due unità, superficiale, ed angolare, sono espresse, mentrechè nella uguaglianza

$$\text{Fuso } AMBN = 2A,$$

le stesse unità si devono sottindere; il che non può mai produrre equivoco di sorta, e molto meno indurre in errore.

PROPOSIZIONE CXVIII — *TEOREMA*.

307. *L'aja d'un triangolo sferico ha per misura il raggio della sfera moltiplicato per la somma dei tre archi che misurano i tre angoli del triangolo diminuita d'una mezza circonferenza* (fig. 58).

Dim. Sia ABC un triangolo sferico. Si prolunghi il lato BC finchè si formi il circolo massimo $BCbc$, di cui fa parte; indi si prolunghino ancora gli altri due lati AB, AC al di sopra, e al di sotto del piano $BCbc$; essi incontreranno questo piano nei punti, b, e c; ed essi stessi s'incontreranno nel punto a al di sotto del piano medesimo.

Or siccome due circoli massimi si tagliano sempre scambievolmente in due parti uguali (n° 214), così sarà BCb una semicirconferenza, come ancora Cbc; per conseguenza si avrà $BCb = Cbc$, e togliendo la parte comune Cb, resterà $BC = bc$. Nello stesso modo si dimostra che $CAc = ACa$, e tolta la parte comune AC, risulterà $Ac = Ca$; e così pure sarà $BAb = ABa$, e sottratta la parte comune AB, resterà $Ab = Ba$.

Dunque i triangoli Abc, ed aBC hanno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno; e perciò sono equivalenti, non potendo combaciare per essere simmetrici, come è facile vedere. Da ciò si deduce che la somma dei triangoli ABC, ed Abc equivale alla somma dei triangoli ABC, ed aBC, vale a dire al fuso $ABaCA$ il quale ha per angolo l'angolo A del triangolo proposto.

Ciò premesso, l'emisfero $ABCbc$, superiore al piano $BCbc$, è composto de' quattro triangoli sferici ABC, Abc, ABc, AbC, cioè del fuso sferico che ha per angolo A, e dei due triangoli ABc, AbC; e riflettendo che, se a ciascuno di questi due triangoli si aggiunge il triangolo proposto ABC, ne risultano i due fusi sferici che hanno per angoli B e C, si conchiuderà che la somma dei tre fusi sferici; che hanno per angoli A, B, C equivale alla superficie dell'emisfero più due volte il triangolo ABC; e però il doppio triangolo ABC equivarrà alla somma dei tre fusi diminuita della superficie dell' emisfero. Ma ciascuno di quelli fusi equivale al prodotto dell'arco che misura il proprio angolo pel diametro della sfera (n° 304), e la superficie dell' emisfero equivale al prodotto di una semicirconferenza di circolo massimo pel diametro medesimo, dunque il doppio triangolo ABC equivale al diametro moltiplicato per la somma de' tre archi che misurano i tre angoli del triangolo diminuita di una mezza circonferenza; e perciò il triangolo ABC avrà per misura il raggio della sfera moltiplicato per la somma dei detti archi diminuita di una mezza circonferenza. *C. D. D.*

308. *Scolio.* La superficie della sfera avendo per misura il diametro moltiplicato per la circonferenza di un circolo massimo, ovvero il raggio moltiplicato per due volte la circonferenza di un circolo massimo, segue dalla proposizione precedente che la superficie del triangolo sferico sta a quella della sfera come la somma dei tre

archi, che misurano gli angoli del triangolo diminuita di una mezza circonferenza sta a due circonferenze di circolo massimo. Quindi mettendo in luogo degli archi gli angoli da essi misurati, si avrà il teorema che Cavalieri dimostrò il primo, cioè che

La superficie del triangolo sferico sta a quella della sfera come l'eccesso della somma dei tre angoli del triangolo sopra due angoli retti sta ad otto angoli retti.

Se dunque si esprime con E l'eccesso della somma dei tre angoli A, B, C sopra due retti, e si prende per unità di misura delle superficie sferiche il triangolo trirettangolo, e per unità degli angoli l angolo retto, e di più si osservi che la superficie sferica è uguale ad otto triangoli trirettangoli, il teorema sopraccennato sarà espresso dalla proporzione.

$$\text{Triangolo } ABC : 8 : : E : 8,$$

dalla quale si deduce evidentemente

$$\text{Triangolo } ABC = E;$$

e per conseguenza si potrà dire che

La superficie di un triangolo sferico qualunque ha per misura l'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti.

È questa una espressione abbreviata del teorema del Cavalieri, che non può produrre veruno equivoco, allorchè vi si sottintendano le due unità, cioè l'una che serve di misura alle superficie sferiche, e l'altra agli angoli.

Risoluzione di alcuni problemi.

PROPOSIZIONE CXIX — *PROBLEMA.*

309. *Essendo dati i tre lati di un triangolo sferico, trovare i suoi angoli* (fig. 63).

Soluzione. In luogo del triangolo sferico, si considererà l'angolo triedro, che risulta unendo i tre vertici del triangolo proposto col centro della sfera.

Sia dunque $SABC$ un angolo triedro, di cui sono dati i tre angoli piani ASB, BSC, ASC, e supponiamo primieramente che si voglia trovare l'angolo diedro $ASBC$. Si prendano su gli spigoli le parti uguali SA, SB, SC; e si conducano le rette AB, BC, AC; indi per un punto O dello spigolo SB s'innalzino su questo nelle facce ASB, BSC le perpendicolari OM, ed ON, le quali (n° 70), incontreranno le rette BA, BC. L'angolo MON è l'angolo che si vuole determinare, poichè esso è la misura dell'angolo diedro $ASBC$.

Ciò premesso, si facciano sopra un piano gli angoli asb, bcs, csa' respettivamente uguali agli angoli ASB, BSC, ASC della figura in rilievo; prendasi $sa = sb = sa' = SB$, e si uniscano ab, bc, ca'. I triangoli asb, bsc, csa' saranno respettivamente uguali ai triangoli ASB, BSC, CSA, perchè hanno un angolo uguale compreso fra lati uguali. Se dunque colle rette ab, bc, ca' si costruisce un triangolo

$a''bc$, questo triangolo sarà uguale al triangolo ABC, poichè i loro lati sono respettivamente uguali.

Si prenda ora $bo = BO$, e che nella figura piana come in quella in rilievo può esser qualunque, pel punto o si conduca mn perpendicolare sopra sb; il triangolo mob sarà uguale al triangolo MOB, poichè hanno un lato $bo = BO$, adiacente a due angoli uguali ciascuno a ciascuno, cioè $mob = MOB$ come retti, e $mbo = MOB$ a cagione della uguaglianza dei triangoli asb, ed ASB. Per la stessa ragione saranno uguali i triangoli bon, e BON, onde si avrà $om = OM$, ed $on = ON$.

Si faccia inoltre $bm' = bm$, e si congiunga $m'n$, il triangolo $m'bn$ sarà uguale al triangolo MBN; poichè hanno due lati uguali ciascuno a ciascuno, cioè $bm' = bm = BM$, e $bn = BN$; e questi lati sono compresi fra gli angoli cba'', e CBA uguali in virtù della uguaglianza dei triangoli $a''bc$, ed ABC. Quindi sarà $m'n = MN$.

Se dunque colle rette om, on, $m'n$ si costruisca il triangolo $m'no'$ questo triangolo sarà uguale al triangolo MON; dappoichè questi triangoli avranno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno. Laonde l'angolo $m'o'n$ sarà uguale all'angolo cercato MON.

Nello stesso modo si potranno ottenere i due altri angoli driedri, ossia gli angoli piani che li misurano. *C. D. F.*

310. *Scolio*. È facile vedere che la costruzione precedente può sempre applicarsi, qualunque sieno i tre angoli piani, purchè sono tali da poter formare un angolo triedro. Si vede ancora che il problema ammette una sola soluzione.

PROPOSIZIONE CXX — *PROBLEMA*.

311. *Essendo dati i tre angoli di un triangolo sferico, trovare i suoi tre lati.*

Soluzione. Sostituendo al triangolo proposto l'angolo triedro che gli corrisponde, il problema si riduce a trovare gli angoli piani di un angolo triedro allorchè sono dati i suoi angoli driedri M, N, P. Ciò posto, si chiami d l'angolo retto, e si consideri l'angolo triedro supplementario, gli angoli piani di questo saranno espressi da $2d - M$, $2d - N$, e $2d - P$. Quindi applicando le costruzioni fatte nella proposizione precedente si potranno determinare successivamente i tre angoli diedri dell'angolo triedro supplementario. Siano A, B. C questi tre angoli diedri, è manifesto che gli angoli piani dell'angolo triedro proposto verranno espressi respettivamente da $2d - A$, $2d - B$, e $2d - C$, e però il problema sarà risoluto. *C. D. F.*

PROPOSIZIONE CXXI — *PROBLEMA*.

312. *Essendo dati due lati di un triangolo sferico, e l'angolo da essi compreso, trovare il terzo lato* (fig. 63).

Soluzione. Questo problema si riduce al seguente: dati in un an-

golo triedro due angoli piani e l'angolo diedro compreso, trovare il terzo angolo piano. Siano dunque ASB, e BSC i due angoli piani dati, si faccia $SA = SB = SC$, s' innalzino sopra SB le perpendicolari OM, ed ON, e si congiunga MN, l'angolo MON essendo la misura dell'angolo diedro $ASBC$ che si suppone dato, si conoscono nel triangolo MON due lati e l'angolo compreso. Quindi si può costruire questo triangolo, e dedurne l'angolo piano incognito ASC.

Infatti si costruiscano sopra un piano gli angoli asb e bsc rispettivamente uguali agli angoli ASB, e BSC della figura in rilievo; e si prenda $sa = sb = sc = SB$. i triangoli asb, e bsc saranno respettivamente uguali ai triangoli ASB, e BSC. Si faccia inoltre $bo = BO$, e pel punto o si conduca la retta mn perpendicolare a sb; i triangoli mob, e nob saranno rispettivamente uguali ai triangoli MOB, e NOB.

Ciò premesso, si costruisca un triangolo $m''o''n''$, in cui l'angolo $m''o''n''$ sia uguale all'angolo dato formato dalle facce ASB, e BSC, e sia $m''o'' = mo = MO$. e $n''o'' = no = NO$. Questo triangolo sarà uguale al triangolo MON, poichè avranno un angolo uguale compreso fra lati uguali; e ne risulterà $m''n'' = MN$.

Coi lati mb, bn. e $m''n''$ si costruisca il triangolo $m'bn$; questo triangolo sarà uguale al triangolo MBN; poichè avranno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno.

Su la retta bm' si prenda $ba'' = ba$. e si congiunga ca'', il triangolo $a''bc$ sarà uguale al triangolo ABC, poichè gli angoli $a''bc$, ed ABC sono uguali a cagione della uguaglianza dei triangoli $m'bn$, e MBN; e di più si ha $bc = BC$. e $ba'' = ba = BA$.

Da ciò risulta ancora $a''c = AC$. Si costituisca dunque un triangolo $a'sc$, di cui i lati sc, e sa' sieno uguali, e la base sia uguale ad $a''c$; questo triangolo sarà uguale al triangolo ASC, poichè essi avranno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno. L'angolo $a'sc$ sarà dunque il terzo angolo piano richiesto. *C. D. F.*

313. *Scolio.* Conoscendo il terzo angolo piano, si potranno ottenere i due altri angoli diedri colla costruzione del n° 309.

È facile poi vedere che il problema proposto ammette una sola soluzione.

PROPOSIZIONE CXXII — *PROBLEMA.*

314. *Essendo dati un lato ed i due angoli adiacenti di un triangolo sferico, trovare i rimanenti lati ed il terzo angolo.*

Soluzione. Sostituendo al triangolo sferico l' angolo triedro corrispondente, rappresentino A l'angolo piano dato, M, ed N gli angoli che servono di misura agli angoli diedri adiacenti dati. In virtù del teorema del n° 68, l'angolo triedro supplementario avrà due angoli piani uguali a $2d - M$, ed a $2d - N$; e l'angolo diedro compreso sarà espresso da $2d - A$ (chiamando d l'angolo retto).

Applicando le costruzioni del problema precedente, si potrà determinare il terzo angolo piano del triedro supplementario, e poi

colle costruzioni del n° 309. I suoi due altri angoli diedri. Sieno P il terzo angolo piano, B e C i due angoli diedri così determinati, l'angolo triedro proposto avrà necessariamente un terzo angolo diedro espresso da $2d-P$ ed i due altri angoli piani saranno respettivemente uguali a $2d-B$, ed a $2d-C$. Quindi tutte le sue parti saranno conosciute. *C. D. F.*

315. *Scolio.* La risoluzione de'problemi precedenti fa vedere che coll'ajuto dell'angolo triedro supplementario essi si riducono a due soli. Così pure, se fossero dati di un triangolo sferico due lati ed un angolo opposto ad uno di questi lati, ovvero due angoli ed un lato opposto ad uno di questi angoli, la risoluzione dei due problemi accennati si ridurrebbe a quella di uno di essi in virtù dell'angolo triedro supplementario: e però nella proposizione seguente daremo soltanto la risoluzione del primo.

PROPOSIZIONE CXXIII — *PROBLEMA.*

316. *Essendo dati due lati di un triangolo sferico, ed un angolo opposto ad uno di questi lati, trovare i rimanenti angoli, ed il terzo lato* (fig. 64).

Soluzione. Questo problema si riduce al seguente: dati in un angolo triedro due angoli piani ed un angolo diedro apposto ad uno di questi angoli piani, trovare i rimanenti angoli diedri, ed il terzo angolo piano.

Sia dunque $SABC$ l'angolo triedro; supponiamo che siano dati gli angoli piani CSA, BSA, e l'angolo diedro opposto al primo di questi angoli. Per un punto A preso ad arbitrio sullo spigolo SA si conducano due piani: il primo ABE perpendicolare allo spigolo SB, ed il secondo ADE perpendicolare allo spigolo AS. Essendo questi piani entrambi perpendicolari al piano BSA, la loro comune intersezione EA sarà perpendicolare a questo medesimo piano. Or essendo BS perpendicolare alle due rette BA, BE, l'angolo piano rettilineo EBA sarà la misura dell'angolo diedro SB, che per ipotesi è dato. Quindi nel triangolo ABE si conosce l'angolo EBA, e l'angolo retto EAB; di più si conosce ancora il lato AB, perchè nel triangolo rettangolo ABS è noto il lato BS, l'angolo retto SBA, e l'angolo BSA dato per ipotesi, dunque il triangolo ABE è determinato, e perciò sarà noto il lato EA. Ma da un'altra parte si conosce il lato AD, che fa parte del triangolo ASD, dunque si potrà costruire il triangolo ADE rettangolo in A; e per conseguenza si conoscerà l'angolo ADE. Ma la retta AC è nota, perchè per ipotesi è dato l'angolo CSD, e si conoscono i lati SC, SD del triangolo SDC, dunque nel triangolo CDA si conosceranno due lati AD, AC e l'angolo opposto CDA; per conseguenza si potrà determinare il lato DC. Finalmente le tre rette DC, SC, SD determineranno il terzo angolo piano DSC.

Ciò premesso, si faccia sopra un piano l'angolo $A'S'C'$ uguale

all'angolo ASC della figura in rilievo, $A'S'B'=ASB$, si supponga $A'S'=AS$, s'innalzi $A'C'$ perpendicolarmente ad $A'S'$, e si prolunghi finchè incontri $S'B'$ nel punto D'. È manifesto che sarà $A'C'=AC$, $A'D'=AD$, $D'S'=DS$, $C'S'=CS$; e se dallo stesso punto A' si conduca $A'B'$ perpendicolare a $D'S$, si avrà $A'B'=AB$. Si faccia ora al punto B' l'angolo $A'B'E'=ABE$, si conduca la retta $A'E'$ perpendicolare ad $A'B'$, il triangolo $A'B'E'$ sarà uguale al triangolo ABE, e perciò risulta $A'E'=AE$. Volendosi poi costruire il triangolo DAE, si osservi che $A'D'=AD$, $A'E'=AE$, e siccome l'angolo $D'A'E'$ è retto, così se si prenda $A'E''=A'E'$ e si conduca $D'E''$, si avrà il triangolo $D'A'E''$ uguale a DAE; e quindi l'angolo $E''D'A'$ sarà uguale ad EDA. Il triangolo DCA si potrà costruire osservando che $D'A'=DA$, $C'A'=CA$, e l'angolo $E''D'A'=EDA$ opposto a CA. Quindi dal punto A' come centro e col raggio $A'C'$ si descriverà un arco che taglierà $D'E''$ in un punto O, sarà $D'O=DC$; poi con i tre lati $C'S'=CS$, $D'S'=DS$, e $D'O=DC$, si descriverà il triangolo $D'S'C''$; l'angolo $D'S'C''$ sarà il terzo angolo piano, ed il problema sarà ridotto a quello del n. 311. C. D.F.

317. *Scolio* I. Nella costruzione precedente si è fatta la figura nella supposizione che l'angolo $A'S'C'$ fosse maggiore dell'angolo $A'S'D'$; per conseguenza $A'C'$ è maggiore di $A'D'$, ed il triangolo $A'D'O'$ è sempre possibile in un solo modo, come l'angolo triedro. Se l'angolo $A'S'C'$ opposto all'angolo diedro dato, è minore dell'angolo $A'S'D'$ il lato $A'C'$ è ancora minore di $A'D'$, ed il triangolo $A'D'O$, è possibile in due modi diversi, o in un solo, o è impossibile, secondochè $A'C'$ è maggiore, uguale o minore della perpendicolare abbassata da A' sopra $D'O$ (*)

L'angolo solido triedro può aver dunque due soluzioni, una sola, o è impossibile.

318. *Scolio* II. La soluzione precedente suppone 1.° che ciascuno de'due angoli piani dati sia minore di un retto; 2.° che l'angolo diedro dato sia acuto. Quindi non può applicarsi quando la somma degli angoli accennati si suppone uguale o maggiore di due retti, o anche quando fosse minore di due retti, ma uno de'due non sia minore di un retto, come pure quando l'angolo diedro dato fosse o retto o ottuso. Ma siccome il problema precedente in tutt'i casi possibili interessa principalmente la trigonometria sferica, così rimettiamo ai trattati di questa scienza la risoluzione compiuta di esso(**).

(*) Vedi Geom, Pian. 2ª Ediz. n°. 386.

(**) La risoluzione puramente geometrica del problema di cui è parola nel testo, ha condotto geometri valentissimi a risultamenti che non sono sempre d'accordo fra loro. Ciò nasce, almeno secondo la nostra maniera di vedere, perchè con l'ajuto delle sole considerazioni geometriche è difficile tener dietro a tutte le condizioni, che implicitamente es stono nel problema accennato, quando si voglia risolverlo compiutamente. La sola analisi algebrica adoperata come si conviene è capace di abbracciare tutte le condizioni, che vi possono essere, senza escluderne alcuna, come può vedersi nell'eccellente trigonometria del ch. Professore *F. Amante*.

319. *Scolio*. III. La risoluzione de'problemi precedenti offre il mezzo di assegnare i caratteri che determinano gli angoli solidi poliedri.

Supponiamo che l'angolo solido S (fig.26) sia formato dai quattro angoli piani ASB. BSC, CSB', $B'SA$. La conoscenza di questi angoli non basta per determinare l'angolo solido; perocchè con gli stessi angoli piani si potrebbe formare una infinità di angoli solidi. Infatti, se per gli spigoli SA, SC si faccia passare il piano ASC, l'angolo solido S sarà decomposto in due angoli triedri $SABC$, $SAB'C$. Or la conoscenza de'due angoli piani ASB, BSC non basta per determinare l'angolo triedro $SABC$. ma vi bisogna quella del terzo angolo piano ASC; e lo stesso avviene per l'angolo triedro $SAB'C$, che non resta determinato dalla sola conoscenza de'due angoli piani CSB', $B'SA$. Quindi è manifesto che con quattro angoli piani si potranno formare tanti angoli solidi diversi quanti saranno i valori diversi che si potranno dare all angolo ASC. Ma se alla conoscenza dei quattro angoli piani si aggiunga quella dell'angolo diedro SB, allora l'angolo solido triedro $SABC$ sarà totalmente determinato, e per mezzo del problema risoluto (n° 312) si potrà trovare il terzo angolo piano ASC; il che determinerà ancora l'altro angolo triedro $SAB'C$; e per conseguenza l'angolo solido S sarà determinato.

È facile ora vedere che per determinare un angolo solido formato da cinque angoli piani, non basta conoscere questi angoli, ma vi bisogna ancora la conoscenza di due angoli diedri; converrebbe conoscere tre angoli diedri ed i sei angoli piani nell'angolo solido formato da questi angoli, e così in progresso.

Abbiamo dimostrato (n° 80) che: *Due angoli poliedri sono uguali fra loro, allorchè sono composti di un medesimo numero di angoli, triedri rispettivamente uguali, e disposti nello stesso ordine.*

Dietro alle cose precedenti è facile ora vedere che si potrebbe dare a questo teorema un'altra enunciazione, dicendo:

Due angoli poliedri sono uguali fra loro, allorchè sono composti di un medesimo numero di angoli piani rispettivamente uguali. e disposti nello stesso ordine; e di più un angolo diedro del primo sia uguale all'angolo diedro omologo del secondo, se gli angoli solidi sono tetraedri; due angoli diedri del primo siano uguali agli angoli diedri omologhi del secondo, se gli angoli solidi sono pentaedri; e così di seguito (*).

(*) Euclide non ha parlato che de'soli angoli solidi triedri, e lo ha fatto in un modo imperfettissimo. Quindi è avvenuto che Clavio, il migliore interpetre di quel geometra, è caduto in errori grossolani, quando nel suo comento ha voluto assegnare i caratteri dell'uguaglianza degli angoli solidi poliedri. Tutta questa dottrina appartiene ai geometri moderni.

INDICE

Fig.e 3
Fig.e 7
Fig.e 16
Fig.e 11
Fig.e 12
Fig.e 19
Fig.e 22
Fig.e 27
Fig.e 31.

Fig. 36
39
Fig. 43
Fig. 48
Fig. 55
Fig. 61
Fig. 62
Fig. 64